



Faculté des sciences  
Département de physique

# Le modèle de Rabi

Pauline Toussaint

Travail de fin d'études présenté  
dans le cadre de l'obtention du grade de  
Master en sciences physiques  
Promoteur : John Martin

Année académique 2014-2015



# Remerciements

Pour commencer, je souhaiterais exprimer toute ma gratitude à mon promoteur, Monsieur John Martin, pour son précieux encadrement, sa disponibilité, ses nombreuses relectures et ses conseils tout au long de l'année.

Ensuite, je remercie Messieurs Laurent Dreesen, Peter Schlagheck et Alejandro Silhanek pour avoir accepté de former mon comité de lecture. J'espère que celle-ci vous sera agréable.

Merci à Catherine Brauns et à mes parents pour leurs relectures de mon mémoire.

Merci à ma famille et à Lucas pour leur soutien. Merci à mes amis d'avoir rendu ces années d'université inoubliables.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Interaction entre un atome et le champ électromagnétique : le modèle de Rabi</b>	<b>5</b>
1.1 Hamiltonien du système "atome + champ"	5
1.2 Hypothèses de travail et réduction à l'hamiltonien de Rabi	6
1.2.1 Le noyau infiniment lourd	6
1.2.2 L'atome à deux niveaux	6
1.2.3 Approximation dipolaire électrique	7
1.2.4 Hamiltonien de Rabi	8
1.3 Importance relative des différents termes de l'hamiltonien	8
1.3.1 Corrections sur les énergies et les vecteurs propres	9
1.3.2 Probabilités de transition	10
1.3.3 Effet Stark dynamique	11
1.4 Lois de conservation	12
<b>2 Quelques systèmes décrits par le modèle de Rabi</b>	<b>15</b>
2.1 Les qubits supraconducteurs	15
2.1.1 Jonction Josephson	16
2.1.2 Jonctions Josephson utilisées comme qubits	18
2.1.3 Couplage des qubits pour l'électrodynamique quantique en cavité	18
2.2 Un spin dans un champ magnétique tournant, la RMN	19
<b>3 Modèle de Jaynes-Cummings</b>	<b>23</b>
3.1 Etats habillés	23
3.2 Répulsion de niveaux	25
3.3 Dynamique du système	28
3.3.1 Oscillations de Rabi	28
3.3.2 Collapse-revival	29
<b>4 Solution analytique au modèle de Rabi</b>	<b>31</b>
4.1 Représentation de Bargmann	31
4.2 Résolution du modèle de Rabi dans l'espace de Bargmann	33
4.2.1 Représentation de Bargmann pour le modèle de Rabi	33
4.2.2 Hamiltonien dans l'espace de Bargmann	34
4.2.3 Résolution de l'équation de Schrödinger dans $\mathcal{H}_+$	35
4.2.4 Résolution de l'équation de Schrödinger dans $\mathcal{H}_-$	38
<b>5 Étude numérique du modèle de Rabi</b>	<b>39</b>
5.1 Approche numérique : troncation de l'espace d'Hilbert	39
5.1.1 Convergence des valeurs et vecteurs propres	40
5.1.2 Confrontation avec les solutions analytiques	42

---

5.2	Répulsion de niveaux . . . . .	44
5.2.1	Spectres obtenus numériquement . . . . .	44
5.2.2	Théorie des perturbations . . . . .	48
5.3	Dynamique générée par l'hamiltonien de Rabi . . . . .	50
5.3.1	Nombre d'états non-couplés contribuant aux états propres . . . . .	50
5.3.2	Évolution temporelle des populations . . . . .	50
5.3.3	Analyse spectrale . . . . .	53
5.3.4	Probabilité d'occupation maximale . . . . .	54
	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>
	<b>A Théorie des perturbations</b>	<b>61</b>
A.1	Théorie des perturbations indépendantes du temps . . . . .	61
A.1.1	Corrections sur les énergies et vecteurs propres . . . . .	61
A.1.2	Probabilités de transitions . . . . .	63
	<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>

# Introduction

## Origine du modèle de Rabi

Le modèle de Rabi a été introduit par Isidor Rabi à la fin des années 30 [1, 2]. Initialement, il servait à rendre compte du comportement d'un spin nucléaire dans un champ magnétique tournant lors d'expériences de résonance magnétique nucléaire (RMN). Rabi a construit son modèle de manière semi-classique, la matière étant traitée quantiquement et le champ classiquement. Lors d'une expérience de RMN, le spin nucléaire est d'abord plongé dans un champ magnétique constant et homogène afin de lever la dégénérescence des niveaux "spin up" et "spin down", par effet Zeeman. Ensuite est ajouté un champ magnétique tournant qui a pour effet d'induire des transitions entre les états de spin. C'est le couplage avec ce deuxième champ que le modèle de Rabi décrit. Il est possible d'en obtenir une version totalement quantique en quantifiant également le champ électromagnétique. C'est la façon la plus simple de coupler un système à deux niveaux avec un mode bosonique, ce qui fait du modèle de Rabi l'un des plus élémentaires pour traiter des interactions entre deux systèmes quantiques. Pour cette raison, il se trouve être applicable à de nombreuses situations, dont quelques unes sont illustrées sur la figure 1. Il décrit notamment l'interaction entre le champ électrique d'une

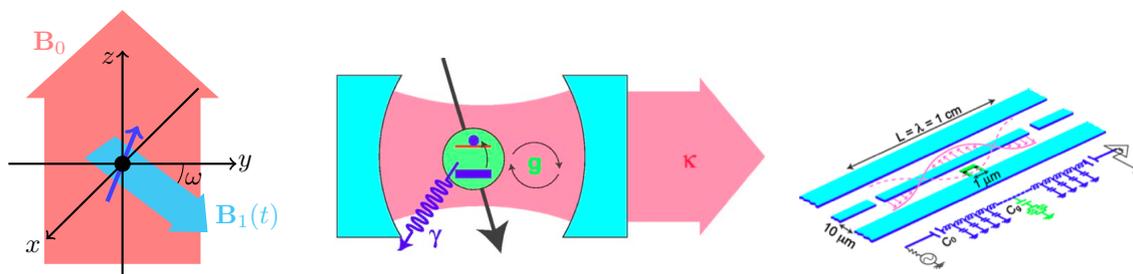


FIGURE 1 – Schéma de différents systèmes pouvant être décrits par le modèle de Rabi. De gauche à droite : un spin nucléaire dans un champ magnétique (RMN), un atome dans une cavité électromagnétique et un circuit supraconducteur. Figures tirées de [3].

cavité électromagnétique et deux niveaux électroniques d'un atome [4] ou encore l'interaction entre un circuit supraconducteur et un résonateur électronique. Il peut également être simulé dans un système d'ions piégés par une configuration particulière de champs électromagnétiques, telle que dans un piège de Paul [5].

Ces dernières décennies, le développement de l'électronique des supraconducteurs a conduit, grâce aux jonctions Josephson, à la création de circuits se comportant comme des systèmes quantiques à deux niveaux. De tels systèmes sont appelés bits quantiques ou qubits. Le couplage d'un tel qubit avec un résonateur composé de capacités et de résistances simule le comportement d'une expérience d'électrodynamique quantique en cavité [6], le qubit faisant office d'atome artificiel. Ces circuits électrodynamiques, sont donc également décrits par le modèle de Rabi. Le grand avantage qu'ils offrent est leur échelle macroscopique qui les rend nettement plus maniables que n'importe quel autre qubit

[7]. La supraconductivité étant une manifestation macroscopique de phénomènes microscopiques, la taille du système n'en diminue pas pour autant les propriétés de cohérence quantique nécessaires à la réalisation d'opérations quantiques. Aussi, l'étude du modèle de Rabi est indispensable pour espérer pouvoir contrôler la dynamique des qubits afin de les utiliser en vue d'applications spécifiques.

### Systèmes d'électrodynamique quantique en cavité

Les systèmes d'électrodynamique quantique en cavité, qu'ils soient artificiels ou non, sont caractérisés par un même ensemble de paramètres [8]. Le premier est la fréquence de transition  $\omega_0$  entre les deux niveaux de l'atome (réel ou artificiel). Celle-ci dicte la fréquence  $\omega_L$  du mode du champ de la cavité, qui est celle la plus proche de  $\omega_0$ . Lorsque ces deux fréquences sont égales ( $\omega_L = \omega_0$ ), on parle de résonance. La force du couplage  $g$  entre l'atome et le champ est également un paramètre important car il gouverne la dynamique du système. Le paramètre pertinent qui définit le régime de couplage du système est  $g/\omega_L$  ou  $g/\omega_0$ , les deux fréquences  $\omega_L$  et  $\omega_0$  étant proches. Alors que le couplage de l'atome n'est souhaité qu'avec un seul mode du champ, d'autres modes sont présents dans et en dehors de la cavité. L'atome interagit avec tous ces modes, ce qui en fait un système ouvert. Cela mène à une dissipation d'énergie, entraînant une décroissance des populations aussi bien au niveau de l'atome, par émission spontanée, qu'au niveau du mode du champ, par pertes (notamment au travers des miroirs). Le modèle de Rabi ne tient pas compte de ces dissipations et il est nécessaire de les minimiser afin de préserver la cohérence du système. Le taux de dissipation de l'atome est noté  $\gamma$  et celui du champ  $\kappa$ . Le facteur de qualité de la cavité est défini comme  $Q = \omega_L/\kappa$ . Des ordres de grandeur de ces paramètres pour les différents types de cavité sont donnés dans la table 1.

Système expérimental	$\omega_L/2\pi$	$g/2\pi$	$\gamma/2\pi$	$\kappa/2\pi$	$g/\omega_L$	$Q$
Cavité optique	350 THz	10 MHz	3 MHz	1 MHz	$2 \cdot 10^{-8}$	$10^8$
Cavité micro-onde	50 GHz	50 kHz	30 Hz	1 kHz	$10^{-6}$	$10^8$
Circuit supraconducteur	10 GHz	100 MHz	3 MHz	30 MHz	$10^{-2}$	$10^4$
Excitons	400 THz	100 GHz	0.1 GHz	30 GHz	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^4$

TABLE 1 – Ordres de grandeur des paramètres expérimentaux en fonction du type de cavité (extrait de [8]).

Le premier type de cavité est celui qui est utilisé avec des atomes présentant une transition optique correspondant à un rayonnement de longueur d'onde visible. Ces dispositifs sont pour cette raison appelés cavités optiques. Ils donnent lieu à un régime de couplage faible. Un autre type de cavité piégeant un rayonnement micro-onde est utilisé avec des atomes de Rydberg [8]. Ces atomes sont dans un état excité avec un très grand nombre quantique principal  $n$ , ce qui leur confère une grande taille, entraînant un grand moment dipolaire électrique, fortement couplé au champ de la cavité. De plus, ces atomes ont un faible taux d'émission spontanée  $\gamma$ , permettant plus pertinemment de négliger la dissipation d'énergie. Néanmoins, le régime de couplage obtenu avec ce type de cavité reste faible. Plus récemment ont été développés les qubits supraconducteurs couplés à des résonateurs. Les paramètres cités précédemment dépendent alors des capacités et autres composantes du système, ainsi que des tensions mises en jeu. Cela rend les circuits supraconducteurs beaucoup plus stables et contrôlables que les autres types de cavité. Le couplage obtenu est plus homogène et plusieurs ordres de grandeur supérieurs au couplage entre des atomes et des cavités électromagnétiques. Ceci permet d'atteindre le régime de couplage fort pour lequel  $g \sim \omega_0$ . Ces systèmes offrent de nouvelles perspectives en informatique quantique [9]. Afin de réaliser des opérations quantiques rapides, il est important de travailler avec une grande fréquence de couplage car c'est elle qui dicte l'échelle de temps de la dynamique du système. Toutefois, le taux de dissipation du champ  $\kappa$  ne doit pas être trop faible car la mesure de l'état du qubit supraconducteur se fait au moyen des radiations émises par le résonateur. Ce problème n'intervient pas avec des atomes car leur état peut être mesuré à la sortie de la cavité. Il existe un dernier type de cavité utilisant également des atomes artificiels. Ceux-ci sont réalisés par

des excitons (paires électron-trou) dans un îlot quantique semi-conducteur. Les excitons peuvent être modélisés comme des atomes d'hydrogène, le trou faisant office de proton. Ils possèdent un rayon largement supérieur au rayon de Bohr, à l'origine d'un grand couplage avec le champ électromagnétique, similairement aux atomes de Rydberg. Les taux de dissipation des excitons et du champ sont par contre plus élevés que pour les autres types de cavité en raison du faible facteur de qualité d'une cavité semi-conductrice.

### Structure de l'hamiltonien de Rabi

Tout système quantique est caractérisé par son hamiltonien, qui est l'opérateur associé à l'énergie totale du système. La connaissance de ses valeurs propres, qui définissent les niveaux d'énergie du système, est cruciale. D'une part, elles sont directement accessibles par des expériences de spectroscopie qui permettent d'observer les différentes transitions entre les niveaux d'énergie du système. Ces expériences consistent à exciter le système avec un champ extérieur oscillant. Un balayage en fréquence de ce champ est effectué et des pics d'absorption sont observés aux fréquences de transition [10]. D'autre part, lorsque l'hamiltonien est indépendant du temps, la connaissance de ses valeurs et vecteurs propres est suffisante pour prédire la dynamique du système.

L'hamiltonien de Rabi, qui nous occupera tout au long de ce travail, se présente sous la forme

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (1)$$

où  $\hat{H}_A$  est l'opérateur associé à l'énergie de l'atome (modélisé comme un système à deux niveaux),  $\hat{H}_R$  est associé au champ et  $\hat{H}_{\text{int}}$  est associé à l'énergie d'interaction entre l'atome et le champ. C'est ce dernier terme qui induit des transitions entre les différents niveaux d'énergie du système en l'absence de couplage, d'hamiltonien  $\hat{H}_A + \hat{H}_R$ . Alors qu'en mécanique classique, l'énergie du système est strictement conservée, la physique quantique ne requiert la conservation que de la valeur moyenne de l'hamiltonien. Cela autorise le système à peupler des états d'énergie différente de celle de l'état initial. L'interaction entre l'atome et le champ donne lieu à deux types de transitions possibles. Les premières sont dites résonnantes et sont les transitions où l'atome passe d'un état d'énergie inférieure à un état d'énergie supérieure avec création d'un photon dans le champ et vice versa. Les différences d'énergie qu'elles mettent en jeu sont faibles puisque les fréquences de transition atomique  $\omega_0$  et du champ  $\omega_L$  sont proches. Les secondes, dites non-résonnantes, représentent l'excitation ou la désexcitation de l'atome et du champ simultanément. Elles mettent en jeu de grandes différences d'énergie et sont dès lors beaucoup moins probables que les transitions résonnantes. Ceci justifie la séparation de l'hamiltonien d'interaction en deux parties

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_{\text{int}}^{\text{rés}} + \hat{H}_{\text{int}}^{\text{non-rés}}. \quad (2)$$

Le premier terme est responsable des transitions résonnantes, qui conservent le nombre d'excitations du système. Cela permet de restreindre la recherche des états propres aux états possédant tous le même nombre d'excitations. Le second terme entraîne des transitions non-résonnantes et ne conserve pas le nombre d'excitations. Sa présence complique l'hamiltonien de Rabi et longtemps, les physiciens ont cru qu'il n'était pas possible de le diagonaliser analytiquement. Dans les années 60, Jaynes et Cummings ont proposé un modèle simplifié [11] qui revient à négliger le terme  $\hat{H}_{\text{int}}^{\text{non-rés}}$ , sous l'approximation dite de "l'onde tournante" (Rotating Wave Approximation - RWA). L'hamiltonien de Rabi se réduit alors à l'hamiltonien de Jaynes-Cummings,

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_{\text{int}}^{\text{rés}}. \quad (3)$$

L'approximation de l'onde tournante n'est valable que dans l'hypothèse où la constante de couplage  $g$  est faible devant les autres fréquences du système, ce qui est le cas dans les expériences d'atomes en cavité dans les domaines optique et micro-onde (voir table 1). De ce fait, la dynamique du modèle de Jaynes-Cummings, qui admet des solutions analytiques, a été grandement étudiée en dépit de celle

du modèle de Rabi. Avec l'avènement, dans les années 80, des circuits supraconducteurs caractérisés par des couplages intenses, l'approximation de l'onde tournante a été mise à défaut [12]. Le développement des technologies a donc relancé l'intérêt pour le modèle de Rabi et ses termes non-résonnants qui peuvent jouer un rôle important dans les circuits supraconducteurs.

Le modèle de Rabi ayant la réputation d'être insoluble analytiquement, il ne restait d'autre choix que la diagonalisation numérique de son hamiltonien. Toutefois, en 2011, D. Braak a montré que l'hamiltonien possède une symétrie suffisante pour être diagonalisé analytiquement [13]. Pour cela, Braak a utilisé un formalisme de la mécanique quantique basé sur la représentation en termes d'états cohérents, développé par V. Bargmann dans les années 60 [14]. Depuis, de nombreuses autres manières de calculer analytiquement les états propres de l'hamiltonien de Rabi ont été proposées, utilisant divers outils de l'analyse complexe [15, 16, 17].

### Plan du mémoire

Ce mémoire vise d'une part à présenter la résolution analytique du modèle de Rabi avec davantage de détails que dans les publications originales de Braak. D'autre part, il a pour but d'explorer quelques grandes différences entre les modèles de Rabi et de Jaynes-Cummings. Au chapitre 1, nous dériverons l'expression de l'hamiltonien de Rabi dans le contexte de l'interaction d'un atome avec un champ électromagnétique. Nous exposerons les différentes hypothèses utilisées et nous attarderons sur les différents termes de couplage composant l'hamiltonien de Rabi et sur ses lois de conservation. Au chapitre 2, nous présenterons quelques systèmes dont la dynamique est régie par l'hamiltonien de Rabi. Nous nous focaliserons notamment sur l'obtention de qubits à partir de circuits supraconducteurs. Au chapitre 3, nous rappellerons la dynamique bien connue de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings. Le chapitre 4 est consacré à la résolution analytique originale de Braak, nécessitant préalablement l'introduction de la représentation de Bargmann. Au chapitre 5, nous exposerons nos résultats découlant du traitement numérique de l'hamiltonien de Rabi, après avoir vérifié la convergence de notre méthode, ainsi que son accord avec les résultats découlant de la résolution analytique. Enfin, une conclusion ainsi qu'une annexe rappelant les résultats de la théorie des perturbations viendront clôturer ce travail.

# Chapitre 1

## Interaction entre un atome et le champ électromagnétique : le modèle de Rabi

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'interaction entre un atome et un mode du champ électromagnétique et à sa description par le modèle de Rabi. Dans ce but, nous présentons l'hamiltonien qui régit la dynamique d'un tel système en toute généralité et nous posons quelques hypothèses afin de le réduire à l'hamiltonien de Rabi. Ensuite, nous nous intéressons aux différents termes d'interactions présents dans cet hamiltonien et que l'on peut classer en deux parties, les termes résonnants et non-résonnants. A l'aide de la théorie des perturbations, nous regardons leurs importances relatives et les probabilités qu'ils ont d'induire des transitions. Enfin, nous étudions les lois de conservation de chacun de ces hamiltoniens qui sont très importantes pour la suite du mémoire.

### 1.1 Hamiltonien du système "atome + champ"

Le système composé d'un atome couplé à un mode du champ électromagnétique (issu d'une cavité ou d'un laser) voit son évolution régie par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

avec l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_R + \hat{H}_{\text{int}} \quad (1.2)$$

composé de trois termes décrivant respectivement l'atome isolé, le rayonnement électromagnétique et les interactions entre ces deux-ci. L'hamiltonien de l'atome isolé est donné par

$$\hat{H}_A = \sum_{\alpha} \frac{\hat{\mathbf{p}}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \hat{V}_{\text{coul}}, \quad (1.3)$$

où  $\hat{\mathbf{p}}_{\alpha}$  est l'opérateur impulsion d'une particule  $\alpha$  constituant l'atome,  $m_{\alpha}$ , sa masse et  $\hat{V}_{\text{coul}}$  l'opérateur énergie potentielle coulombienne de l'atome. Pour le champ électromagnétique, l'hamiltonien est

$$\hat{H}_R = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega_k \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\epsilon}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.4)$$

où  $\omega_k$  est la fréquence associée au mode de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et de vecteur de polarisation  $\boldsymbol{\epsilon}$  et  $\hat{a}_{\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}}^\dagger$  et  $\hat{a}_{\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}}$  sont les opérateurs de création et de destruction d'un photon de ce mode. Enfin,

$$\hat{H}_{\text{int}} = - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \hat{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}), \quad (1.5)$$

où  $q_{\alpha}$  sont les charges des particules,  $\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}$  leur position et  $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha})$  l'opérateur potentiel vecteur associé au champ électromagnétique

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}) = \sum_{\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} A_{\omega_k} (\hat{a}_{\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}}^\dagger \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{\alpha}}), \quad (1.6)$$

avec  $A_{\omega_k} = \sqrt{\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k}$  et  $V$  le volume de la cavité [18].

Plusieurs approximations sont nécessaires pour passer de l'hamiltonien (1.2) à l'hamiltonien de Rabi. Celles-ci sont détaillées dans la section suivante.

## 1.2 Hypothèses de travail et réduction à l'hamiltonien de Rabi

### 1.2.1 Le noyau infiniment lourd

Tout système peut voir son mouvement décomposé en deux parties, le mouvement de son centre de masse et le mouvement relatif du système par rapport à celui-ci. Il en est de même pour l'atome, dont l'hamiltonien peut s'écrire sous la forme

$$\hat{H}_A = \hat{H}_{\text{CM}} + \hat{K}_{\text{rel}} + \hat{V}_{\text{coul}}, \quad (1.7)$$

où  $\hat{H}_{\text{CM}}$  est l'énergie cinétique du centre de masse,  $\hat{K}_{\text{rel}}$  est l'énergie cinétique des électrons dans le système du centre de masse et  $\hat{V}_{\text{coul}}$  leur énergie potentielle. Sous l'hypothèse du noyau infiniment lourd, le centre de masse est considéré fixe, ce qui revient à traiter son mouvement de manière classique. Il ne reste dans l'hamiltonien atomique que la contribution des niveaux électroniques  $\hat{K}_{\text{rel}} + \hat{V}_{\text{coul}}$ . En notant les  $N$  niveaux  $|i\rangle$ , nous obtenons [18]

$$\hat{H}_A = \sum_{i=1}^N E_i |i\rangle \langle i|, \quad (1.8)$$

où  $E_i$  est l'énergie du niveau  $|i\rangle$ .

### 1.2.2 L'atome à deux niveaux

L'hypothèse suivante consiste à considérer un atome à deux niveaux interagissant avec un mode unique  $L$  du rayonnement (d'une cavité électromagnétique ou d'un laser), dont la fréquence  $\omega_L$  est proche de la fréquence de la transition entre les deux niveaux atomiques considérés. L'ensemble formé par les autres modes est considéré comme un réservoir avec lequel l'interaction mène au processus d'émission spontanée, qui sera supposée négligeable car elle ne change la dynamique du système que de façon ponctuelle (lors d'une émission). L'hamiltonien du système "atome + champ" se décompose sous la forme [19]

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_L + \hat{H}_{\text{Reservoir}} + \hat{H}_{\text{int,L}} + \hat{H}_{\text{int,Reservoir}}, \quad (1.9)$$

où  $\hat{H}_L = \hbar\omega_L(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$  est l'hamiltonien du mode  $L$  considéré,  $\hat{H}_A$  est l'hamiltonien atomique,  $\hat{H}_{\text{Reservoir}}$  l'hamiltonien exprimant tous les autres modes du champ électromagnétique et  $\hat{H}_{\text{int,L}}$  et

---

1. Le terme  $\hbar\omega_L/2$  sera par la suite négligé, celui-ci ne provoquant qu'un décalage en énergie du spectre de l'hamiltonien.

$\hat{H}_{\text{int,Reservoir}}$  les hamiltoniens de couplage entre l'atome et le mode  $L$  et le réservoir, respectivement. Comme les interactions avec le réservoir sont négligées, les termes  $\hat{H}_{\text{Reservoir}}$  et  $\hat{H}_{\text{int,Reservoir}}$  ne seront plus considérés.

Dans cette expression, l'hamiltonien de l'atome assimilé à un système à deux niveaux s'écrit

$$\hat{H}_A = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|, \quad (1.10)$$

où  $E_e$  et  $E_g$  sont les énergies des deux niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  de la transition atomique considérée et  $E_e = E_g + \hbar\omega_0$ ,  $\omega_0$  étant la fréquence de transition. Le zéro d'énergie est redéfini pour être à mi-chemin entre ces deux niveaux

$$\hat{H}_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \quad (1.11)$$

avec  $\sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$ .

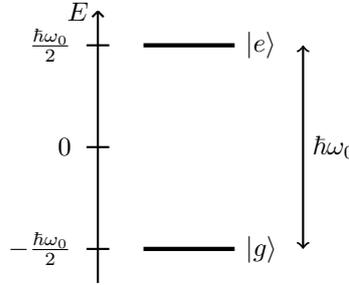


FIGURE 1.1 – Schéma des états de l'atome assimilé à un système à deux niveaux.

L'hamiltonien  $\hat{H}_A + \hat{H}_L$  possède des états propres appelés états non-couplés. Ces états représenteraient un système où l'atome et le champ n'interagiraient pas, ce qui n'est pas une situation physique. Néanmoins, ces états propres serviront de base à la recherche des états propres de l'atome habillé, c'est-à-dire en interaction avec le champ.

### 1.2.3 Approximation dipolaire électrique

Dans l'approximation dipolaire électrique, le potentiel vecteur du champ électromagnétique est considéré homogène au niveau de l'atome. Cela revient à négliger la composante magnétique du champ, provenant du rotationnel du potentiel vecteur. Ceci est valable à condition que la longueur d'onde du rayonnement soit bien plus grande que la taille de l'atome, c'est-à-dire  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du rayonnement et  $\mathbf{r}$  la position relative des électrons par rapport au centre de masse.

En notant la position du centre de masse de l'atome  $\mathbf{R}$ , le facteur exponentiel intervenant dans l'expression du potentiel vecteur (1.6) devient au 1<sup>er</sup> ordre

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}_\alpha} = e^{i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_\alpha + \mathbf{R} - \mathbf{R})} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{R})} \simeq e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}. \quad (1.12)$$

L'hamiltonien d'interaction dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique prend la forme

$$\hat{H}_{\text{int},L} = - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \hat{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{A}}_L(\mathbf{R}) + \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \hat{\mathbf{A}}_L^2(\mathbf{R}), \quad (1.13)$$

avec

$$\hat{\mathbf{A}}_L(\mathbf{R}) = A_{\omega_L} (\hat{a}_L \boldsymbol{\epsilon} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} + \hat{a}_L^{\dagger} \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}). \quad (1.14)$$

A l'aide d'une transformation de jauge (l'équivalent de la transformation de Göpper-Mayer lorsque le champ est traité classiquement), l'hamiltonien d'interaction peut se mettre sous la forme d'une interaction entre la partie transverse (radiative) du champ électrique et un dipôle créé par les électrons de l'atome [19]

$$\hat{H}_{\text{int},L} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{R}), \quad (1.15)$$

où  $\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{R}) = E_{\omega_L} \epsilon (\hat{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + \hat{a}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}})$  est le champ électrique radiatif<sup>2</sup>, avec  $E_{\omega_k} = A_{\omega_k} \omega_k$ , et  $\hat{\mathbf{d}} = -\sum_{\alpha} q_{\alpha} (\hat{\mathbf{r}}_{\alpha} - \mathbf{R})$  est l'opérateur moment dipolaire électrique de l'atome.

### 1.2.4 Hamiltonien de Rabi

A l'aide des hypothèses faites précédemment et d'un choix judicieux du système de coordonnées, l'opérateur champ électrique peut s'exprimer sous la forme

$$\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{R}) = E_{\omega_L} \epsilon (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}). \quad (1.16)$$

L'opérateur dipolaire électrique peut quant à lui se décomposer dans la base des états propres de l'atome

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}} &= \sum_{i,j} |i\rangle \langle j| \hat{\mathbf{d}} |j\rangle \langle i| \\ &= \mathbf{d}_0 (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-) = \mathbf{d}_0 \hat{\sigma}_x, \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec  $\mathbf{d}_0$  l'élément de matrice,  $\mathbf{d}_0 = \langle e| \hat{\mathbf{d}} |g\rangle = \langle g| \hat{\mathbf{d}} |e\rangle$  que l'on choisit réel,  $\hat{\sigma}^+ = |e\rangle \langle g|$  l'opérateur d'excitation atomique qui fait passer l'atome de l'état  $|g\rangle$  à l'état  $|e\rangle$  et  $\hat{\sigma}^- = |g\rangle \langle e|$  l'opérateur de désexcitation atomique. Ces opérateurs sont également appelés opérateurs de sauts quantiques.

L'hamiltonien (1.2), avec les relations (1.11), (1.15), (1.16) et (1.17), se réduit alors à la forme

$$\boxed{\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hbar\omega_L \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a})}, \quad (1.18)$$

où  $g = -E_{\omega_L} \mathbf{d}_0 \cdot \epsilon / \hbar$  est la constante de couplage entre l'atome et le mode  $L$  du champ électromagnétique,  $\omega_L$  est la fréquence champ électromagnétique,  $\omega_0$  est la fréquence de transition entre les niveaux de l'atome,  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^{\dagger}$  sont les opérateurs de création et d'annihilation des photons du champ et  $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-$  et  $\hat{\sigma}_z$  sont les matrices de Pauli. Cet hamiltonien est appelé hamiltonien de Rabi et son étude est l'objet de ce mémoire.

## 1.3 Importance relative des différents termes de l'hamiltonien

L'hamiltonien d'interaction se compose de quatre termes

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g (\hat{\sigma}^- \hat{a}^{\dagger} + \hat{\sigma}^+ \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{a}^{\dagger} + \hat{\sigma}^- \hat{a}). \quad (1.19)$$

Les deux premiers,  $\hat{\sigma}^- \hat{a}^{\dagger}$  et  $\hat{\sigma}^+ \hat{a}$ , sont dit résonants car ils conservent à peu près l'énergie (conservation si  $\omega = \omega_0$ ).  $\hat{\sigma}^- \hat{a}^{\dagger}$  exprime la perte d'un photon du mode  $L$  et l'excitation de l'atome, tandis que  $\hat{\sigma}^+ \hat{a}$  représente le phénomène inverse. Les termes  $\hat{\sigma}^+ \hat{a}^{\dagger}$  et  $\hat{\sigma}^- \hat{a}$  sont dits non-résonants et représentent la création d'un photon dans le mode  $L$  et l'excitation de l'atome pour le premier et la destruction d'un photon du mode  $L$  accompagné de la désexcitation de l'atome pour le second. Ces

<sup>2</sup>. Par la suite, pour alléger les notations, les indices  $L$  sous les opérateurs de création de d'annihilation seront sous entendus.

derniers correspondent à des transitions qui ne conservent pas du tout l'énergie. A l'aide de la théorie des perturbations, nous allons calculer l'importance de ces différents termes.

L'hamiltonien de Rabi (1.18) peut s'écrire sous la forme

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (1.20)$$

où  $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_L = \hbar\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-$  et  $\hat{W} = \hat{H}_{\text{int}}$ . Les états propres de  $\hat{H}_0$  sont des produits tensoriels des états propres électroniques de l'atome  $|i\rangle$  et des états propres du champ  $|n\rangle$ , état de Fock à  $n$  photons. Ils s'écrivent  $|i\rangle \otimes |n\rangle = |i, n\rangle$ ,  $|i\rangle$  pouvant être l'état  $|g\rangle$  ou l'état  $|e\rangle$ . Ils sont appelés états non-couplés et leur énergie sont<sup>3</sup>

$$E_{|g,n\rangle} = n\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2}, \quad E_{|e,n\rangle} = n\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2}. \quad (1.21)$$

Le désaccord entre la fréquence de transition atomique et la fréquence du rayonnement est défini comme

$$\delta = \omega_L - \omega_0. \quad (1.22)$$

Il est supposé petit devant  $\omega_0$ . S'il est non-nul, tous les niveaux non-couplés ont des énergies différentes, ils sont non-dégénérés. Par contre, si le désaccord en fréquence est nul, les niveaux d'énergie sont dégénérés 2 par 2, le niveau  $|e, n\rangle$  ayant la même énergie que le niveau  $|g, n+1\rangle$ . En traitant l'hamiltonien d'interaction comme une perturbation, un ordre de grandeur pour les corrections sur les énergies et sur les états propres, et pour les probabilités de transition relatives à chaque terme de l'hamiltonien peut être obtenu. Dans ces calculs, il est nécessaire de séparer le cas où les niveaux sont dégénérés de celui où ils ne le sont pas.

### 1.3.1 Corrections sur les énergies et les vecteurs propres

**Cas non-dégénéré :  $\delta \neq 0$**

L'action des différents termes d'interaction sur les états non-couplés est

$$\hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger |e, n\rangle = \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle, \quad \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger |g, n\rangle = 0, \quad (1.23)$$

$$\hat{\sigma}^+ \hat{a} |e, n\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}^+ \hat{a} |g, n\rangle = \sqrt{n} |e, n-1\rangle, \quad (1.24)$$

$$\hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger |e, n\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger |g, n\rangle = \sqrt{n+1} |e, n+1\rangle, \quad (1.25)$$

$$\hat{\sigma}^- \hat{a} |e, n\rangle = \sqrt{n} |g, n-1\rangle, \quad \hat{\sigma}^- \hat{a} |g, n\rangle = 0. \quad (1.26)$$

Comme ces états sont orthogonaux entre eux, les corrections au premier ordre sur les énergies, données par la relation (A.9), sont nulles. Les corrections au second ordre, données par la relation (A.10), sont

$$\begin{aligned} \delta E_{|g,n\rangle}^{(2)} &= \frac{|\langle e, n-1 | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a} |g, n\rangle|^2}{E_{|g,n\rangle} - E_{|e,n-1\rangle}} + \frac{|\langle e, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger |g, n\rangle|^2}{E_{|g,n\rangle} - E_{|e,n+1\rangle}} \\ &= \frac{n\hbar g^2}{\delta} - \frac{(n+1)\hbar g^2}{\omega_0 + \omega_L}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{|e,n\rangle}^{(2)} &= \frac{|\langle g, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger |e, n\rangle|^2}{E_{|e,n\rangle} - E_{|g,n+1\rangle}} + \frac{|\langle g, n-1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a} |e, n\rangle|^2}{E_{|e,n\rangle} - E_{|g,n-1\rangle}} \\ &= \frac{-(n+1)\hbar g^2}{\delta} + \frac{n\hbar g^2}{\omega_0 + \omega_L}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

3. En considérant l'échelle d'énergie définie dans la section précédente, c'est-à-dire  $E_{|g,0\rangle} = -\hbar\omega_0/2$

Pour chaque état, il y a une correction relative à un terme résonnant de l'ordre de  $g^2/\delta$  et une correction due à un terme non-résonnant de l'ordre de  $g^2/(\omega_L + \omega_0)$ . Comme  $\delta \ll \omega_0$ , la correction non-résonnante est beaucoup plus faible que la correction résonnante. Les vecteurs propres deviennent, à l'ordre 1 selon la formule (A.11),

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= |g, n\rangle + \frac{\langle e, n-1 | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a} | g, n \rangle}{E_{g,n} - E_{e,n-1}} |e, n-1\rangle + \frac{\langle e, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger | g, n \rangle}{E_{g,n} - E_{e,n+1}} |e, n+1\rangle \\ &= |g, n\rangle + \frac{\sqrt{ng}}{\delta} |e, n-1\rangle + \frac{\sqrt{n+1}g}{\omega_0 + \omega_L} |e, n+1\rangle, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_2\rangle &= |e, n\rangle + \frac{\langle g, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger | e, n \rangle}{E_{e,n} - E_{g,n+1}} |g, n+1\rangle + \frac{\langle g, n-1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a} | e, n \rangle}{E_{e,n} - E_{g,n-1}} |g, n-1\rangle \\ &= |e, n\rangle + \frac{-\sqrt{n+1}g}{\delta} |g, n+1\rangle + \frac{\sqrt{ng}}{\omega_0 + \omega_L} |g, n-1\rangle. \end{aligned} \quad (1.30)$$

L'importance des termes résonnants par rapport aux termes non-résonnants est la même pour les vecteurs propres et pour les valeurs propres.

### Cas dégénéré : $\delta = 0$

Les niveaux sont dégénérés deux par deux. Pour un ensemble de niveaux dégénérés  $|e, n\rangle, |g, n+1\rangle$  d'énergie  $(n+1)\hbar\omega_L$ , les corrections sur les énergies et états propres sont données par les valeurs et vecteurs propres de la matrice d'interaction (A.12)

$$\begin{pmatrix} 0 & \langle e, n | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a} | g, n+1 \rangle \\ \langle g, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger | e, n \rangle & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (n+1)\hbar g \\ (n+1)\hbar g & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Ses valeurs propres sont  $(n+1)\hbar g$  et  $-(n+1)\hbar g$  avec pour vecteurs propres  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  respectivement. Les états propres du système perturbé sont donc

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle + |g, n+1\rangle), \quad (1.32)$$

d'énergie  $E_1 = (n+1)\hbar(\omega_L + g)$  et

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n\rangle - |g, n+1\rangle), \quad (1.33)$$

d'énergie  $E_2 = (n+1)\hbar(\omega_L - g)$ . Les termes non-résonnants n'interviennent pas dans les corrections données par la théorie des perturbations au premier ordre pour des niveaux dégénérés.

### 1.3.2 Probabilités de transition

En plus d'une modification des états propres du système, l'hamiltonien d'interaction induit des transitions entre états non-couplés du système. La théorie des perturbations permet de calculer l'ordre de grandeur de la probabilité d'une transition. Il est donné par la formule (A.26). Pour les différents types de transitions, les ordres de grandeur des probabilités sont

$$P_{|g,n\rangle \rightarrow |e,n-1\rangle} \propto \left| \frac{\langle e, n-1 | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a} | g, n \rangle}{E_{|e,n-1\rangle} - E_{|g,n\rangle}} \right|^2 \sim \left| \frac{g}{\delta} \right|^2, \quad (1.34)$$

$$P_{|e,n\rangle \rightarrow |g,n+1\rangle} \propto \left| \frac{\langle g, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger | e, n \rangle}{E_{|g,n+1\rangle} - E_{|e,n\rangle}} \right|^2 \sim \left| \frac{g}{\delta} \right|^2, \quad (1.35)$$

$$P_{|g,n\rangle \rightarrow |e,n+1\rangle} \propto \left| \frac{\langle e, n+1 | \hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger | g, n \rangle}{E_{|e,n+1\rangle} - E_{|g,n\rangle}} \right|^2 \sim \left| \frac{g}{2\omega_0} \right|^2, \quad (1.36)$$

$$P_{|e,n\rangle \rightarrow |g,n-1\rangle} \propto \left| \frac{\langle g, n-1 | \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a} | e, n \rangle}{E_{|g,n-1\rangle} - E_{|e,n\rangle}} \right|^2 \sim \left| \frac{g}{2\omega_0} \right|^2. \quad (1.37)$$

Les termes  $\hat{\sigma}^+\hat{a}$  et  $\hat{\sigma}^-\hat{a}^\dagger$  ont une probabilité d'induire des transitions bien supérieure aux termes  $\hat{\sigma}^+\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{\sigma}^-\hat{a}$ . Dans une cavité optique,  $\omega_0 \sim 10^{15}$  Hz, il est possible d'obtenir des constantes de couplage allant jusqu'à 10 voire 100 MHz, c'est-à-dire un rapport  $g/\omega_0 \sim 10^{-7}$ . Cela donne une probabilité de transition très faible pour les termes non-résonnants, ce qui permet de les négliger par l'approximation de l'onde tournante (Rotating Wave Approximation - RWA). L'hamiltonien résultant de cette approximation porte le nom d'hamiltonien de Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega_L\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{\sigma}^-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^+\hat{a}), \quad (1.38)$$

dont la dynamique, bien connue, fait l'objet du chapitre suivant. De plus, les corrections sur les énergies et vecteurs propres sont plus importantes pour les termes résonnants (elles sont mêmes inexistantes à l'ordre 1 pour les termes non-résonnants dans le cas dégénéré), ce qui conforte cette approximation. Néanmoins, il a récemment été découvert que dans des circuits supraconducteurs, il est possible d'obtenir des constantes de couplage telles que  $g/\omega_0 \sim 10^{-3}$ , voir table 1.1. Dans ce cas, les termes non-résonnants donnent lieu à des transitions non-négligeables, ce qui rend pertinente l'étude de l'hamiltonien de Rabi dans son intégralité.

Système expérimental	$\omega_0/2\pi$	$g/2\pi$	$g/\omega_0$
Cavité optique	350 THz	110 MHz	$3 \cdot 10^{-7}$
Cavité micro-onde	51 GHz	24 kHz	$10^{-7}$
Circuit supraconducteur	10 GHz	50 MHz	$5 \cdot 10^{-3}$

TABLE 1.1 – Ordres de grandeur des paramètres expérimentaux en fonction du type de résonateur (extrait de [6]).

### 1.3.3 Effet Stark dynamique

Lors de l'approximation de l'onde tournante, les termes de couplage non-résonnants négligés donnent en réalité lieu à une modification de la fréquence de transition atomique proportionnelle à  $g^2/2\bar{\omega}$ , où  $\bar{\omega} = (\omega_0 + \omega_L)/2$  [20]. Dans la mesure où ce décalage est petit, il est possible d'approximer l'hamiltonien de Rabi par un autre hamiltonien qui ne contient que les termes de couplage non-résonnants mais qui tient compte de certains effets des termes non-résonnants. En effectuant une série de transformations infinitésimales, l'hamiltonien effectif suivant peut être obtenu[20]

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \left[ \frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar g\epsilon \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right) \right] \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_L\hat{n} + \hbar g(\hat{n})\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^- + \hbar\hat{a}\hat{\sigma}^+g(\hat{n}) - \frac{\hbar g\epsilon}{2}, \quad (1.39)$$

avec  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  le nombre de photons du champ,  $\epsilon = g/2\bar{\omega}$  et  $g(\hat{n}) = g - g\epsilon^2\hat{n}$ . Cet hamiltonien possède la même forme que l'hamiltonien de Jaynes-Cummings mais avec une modification du couplage, qui dépend du nombre d'excitations, ainsi qu'une modification de la fréquence de transition atomique  $\omega_0$  qui devient

$$\omega_0 + 2g\epsilon\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \quad (1.40)$$

dépendant également du nombre de photons. Le décalage de la fréquence de transition est appelé décalage dynamique de Stark. Lorsque nous calculons les énergies propres de cet hamiltonien, nous obtenons

$$E_{|g,n\rangle} = n\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} - \frac{(n+1)\hbar g^2}{\omega_0 + \omega_L}, \quad (1.41)$$

$$E_{|e,n\rangle} = n\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{n\hbar g^2}{\omega_0 + \omega_L}, \quad (1.42)$$

ce qui concorde avec les énergies des états non-couplés, chacune additionnée de sa correction non-résonnante donnée par la théorie des perturbations (voir les relations (1.27) et (1.28)). L'hamiltonien effectif rend bien compte des effets non-résonnants, dans la limite où ils ne sont pas trop importants. Comme il ne contient que des termes résonnants, la théorie des perturbations ne fournit que la correction résonnante sur les énergies. Les énergies corrigées dans le cas de l'hamiltonien de Rabi et de l'hamiltonien effectif sont donc bien égales mais ne sont acceptables que d'un point de vue perturbatif dans les deux cas.

## 1.4 Lois de conservation

L'hamiltonien de Rabi (1.18), qui peut encore s'écrire

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hbar\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^+ \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^- \hat{a}), \quad (1.43)$$

est indépendant du temps. Il s'ensuit que l'énergie totale du système est conservée

$$\langle \hat{H}_{\text{Rabi}} \rangle = \text{constante}, \quad (1.44)$$

et que la dynamique du système peut être déterminée une fois résolue l'équation aux valeurs propres

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} |\phi_i\rangle = E_i |\phi_i\rangle. \quad (1.45)$$

Deux autres opérateurs jouent un rôle important lorsque l'on s'intéresse à l'hamiltonien de Rabi. Le premier est l'opérateur nombre d'excitations

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-. \quad (1.46)$$

Il totalise le nombre d'excitations atomique et du champ. Comme  $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-] = 0$ ,  $\hat{N}$  commute avec les deux premiers termes de (1.43). Pour les termes d'interaction, comme  $[\hat{\sigma}^+, \hat{\sigma}^-] = \hat{\sigma}_z$ ,  $\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}^+ = \hat{\sigma}^+$ ,  $\hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}^+$ ,  $\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}^- = -\hat{\sigma}^-$  et  $\hat{\sigma}^- \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}^-$ , nous avons

$$\hat{N} \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger \hat{N}, \quad \hat{N} \hat{\sigma}^+ \hat{a} = \hat{\sigma}^+ \hat{a} \hat{N}, \quad (1.47)$$

$$\hat{N} \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger = \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger \hat{N} + 2\hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger, \quad \hat{N} \hat{\sigma}^- \hat{a} = \hat{\sigma}^- \hat{a} \hat{N} - 2\hat{\sigma}^- \hat{a}, \quad (1.48)$$

ce qui mène à

$$[\hat{N}, \hat{H}_{\text{JC}}] = 0 \quad [\hat{N}, \hat{H}_{\text{Rabi}}] \neq 0 \quad (1.49)$$

avec  $\hat{H}_{\text{JC}}$  donné par l'équation (1.38). Les termes résonnants présents dans l'hamiltonien de Jaynes-Cummings,  $\hat{H}_{\text{JC}}$  conservent le nombre d'excitations du système, ce qui permet d'en simplifier fortement l'analyse. L'hamiltonien de Rabi, quant à lui, contient des termes non-résonnants qui entraînent une non-conservation du nombre d'excitations lors de l'évolution du système. Néanmoins, il en conserve la parité. Pour le montrer, nous introduisons l'opérateur parité [21]

$$\hat{P} = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_z, \quad (1.50)$$

où  $(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}$  est l'opérateur parité du nombre de photons et  $\hat{\sigma}_z$  est l'opérateur parité de l'atome. L'opposé de  $\hat{P}$  est l'opérateur associé à la parité du nombre d'excitations. La commutation de  $\hat{P}$  avec les deux premiers termes de (1.43) est immédiate. Pour les autres termes, il faut d'abord remarquer que

$$\begin{aligned} (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= (-1)^{n+1} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger (-1)^{n+1} |n\rangle \\ \Leftrightarrow (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a}^\dagger &= \hat{a}^\dagger (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}+1}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

et

$$\begin{aligned}
(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} |n\rangle &= (-1)^{n-1} \sqrt{n} |n-1\rangle \\
&= \hat{a} (-1)^{n-1} |n\rangle \\
\Leftrightarrow (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} &= \hat{a} (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}-1}.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Les termes d'interactions dans (1.18) s'écrivent aussi sous la forme  $\hat{\sigma}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ . Comme  $\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z$ , nous avons

$$\hat{P} \hat{\sigma}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}
&= -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z \left[ \hat{a}^\dagger (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}+1} + \hat{a} (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}-1} \right] \\
&= -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z (-\hat{a}^\dagger - \hat{a}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \\
&= \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_z
\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$= \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{P}. \tag{1.55}$$

L'hamiltonien de Rabi commute donc avec l'opérateur parité

$$\left[ \hat{H}_{\text{Rabi}}, \hat{P} \right] = 0, \tag{1.56}$$

ce qui implique la conservation de  $\langle \hat{P} \rangle$ .

Ces lois de conservation ont un grand impact sur la dynamique des systèmes régis par les hamiltoniens de Jaynes-Cummings et de Rabi. Pour l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, la conservation du nombre d'excitations implique une séparation de l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  en sous-espaces  $\mathcal{H}_N$  de dimension deux, rassemblant les états de même nombre d'excitations  $N$ . En effet, les termes d'interaction ne couplent les états que deux par deux puisque nous avons

$$\hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger |e, n\rangle = \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle, \quad \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger |g, n+1\rangle = 0, \tag{1.57}$$

$$\hat{\sigma}^+ \hat{a} |e, n\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}^+ \hat{a} |g, n+1\rangle = \sqrt{n+1} |e, n\rangle. \tag{1.58}$$

Pour l'hamiltonien de Rabi, cette séparation disparaît. Cependant, la parité est conservée. Cela divise l'espace d'Hilbert en deux sous-espaces de parités opposées,  $\mathcal{H}_+$  et  $\mathcal{H}_-$ , comme illustré sur la figure 1.2. Les dynamiques du système peuvent être obtenues séparément dans  $\mathcal{H}_+$  et  $\mathcal{H}_-$ .

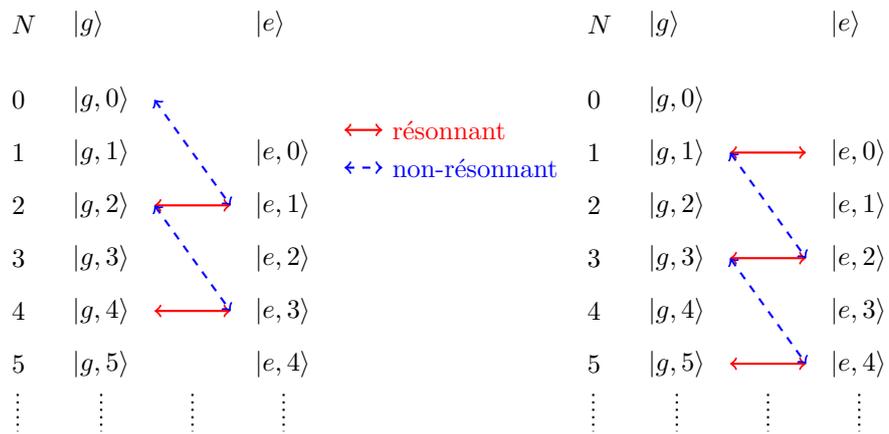


FIGURE 1.2 – Schéma du couplage des états dans les sous-espaces de parité  $\mathcal{H}_-$  (à gauche) et  $\mathcal{H}_+$  (à droite).

## Chapitre 2

# Quelques systèmes décrits par le modèle de Rabi

Dans le premier chapitre, nous avons montré que l'interaction entre un atome et un mode du champ électromagnétique pouvait être décrite par le modèle de Rabi. Pour cela, nous supposons que seule une transition atomique est couplée au mode du champ, rendant l'atome modélisable par un système à deux niveaux. Nous considérons également que l'interaction entre l'atome et le champ est de nature dipolaire électrique et qu'il n'y a pas de dissipation de l'énergie dans les autres modes du champ, que ce soit pour l'atome ou le champ. Le modèle de Rabi ne décrit pas que des systèmes d'optique quantique. Dans ce chapitre, nous présentons deux autres systèmes dont la dynamique est régie par l'hamiltonien de Rabi. Tout d'abord, nous présentons en détails comment des qubits supraconducteurs peuvent être obtenus. Pour cela, nous analysons en détail la physique des jonctions Josephson, élément clé de ces qubits. Ensuite, nous expliquons quels systèmes les utilisant peuvent être décrits par le modèle de Rabi. D'autre part, nous dérivons également le modèle tel que Rabi l'a fait dans les années 30, pour un spin nucléaire dans un champ magnétique tournant, traité de façon semi-classique.

### 2.1 Les qubits supraconducteurs

La supraconductivité est la propriété qu'ont certains matériaux de voir leur résistance à un courant électrique tomber à zéro quand leur température est plus petite qu'une température critique. Les matériaux dans cet état sont appelés supraconducteurs. La supraconductivité est due à la formation de paires d'électrons, dites paires de Cooper, qui se forment par interaction entre ceux-ci et la trame d'ions positifs formant le matériau. Ce sont ces paires qui sont responsables du courant sans résistance.

La théorie quantique de la supraconductivité, développée en 1957 par Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS), indique que, comme les paires d'électrons sont des bosons indiscernables dans l'état fondamental, il est pertinent de représenter un supraconducteur par une fonction d'onde globale [22], représentant toutes les paires de Cooper du système,  $\psi(\mathbf{r})$  admettant la forme polaire

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (2.1)$$

où  $\rho$  est la densité de paires de Cooper et  $\theta$  la phase du supraconducteur. Cette représentation est un premier signe de la persistance d'effets quantiques à l'échelle macroscopique. De plus, en 1962, Brian Josephson a montré que la différence de phase entre deux supraconducteurs influe sur les résultats observables d'une expérience. Ces propriétés particulières vont permettre de créer, à partir de supraconducteurs, des systèmes quantiques à deux niveaux, dits qubits [6, 7]. Les qubits supraconducteurs ont le grand avantage d'être macroscopiques et donc plus facilement contrôlables. Il est possible de coupler ces qubits avec des oscillateurs, afin de retrouver un système similaire à un atome dans une

cavité électromagnétique régie par l'hamiltonien de Rabi. Ces systèmes ont permis d'atteindre expérimentalement un régime de couplage fort, mettant à défaut la RWA, rendant nécessaire l'étude de l'hamiltonien de Rabi.

Cette section est dédiée à l'étude des jonctions Josephson, configuration particulière de supraconducteurs, à leur utilisation en tant que qubits et enfin à la mise en place de systèmes régis par l'hamiltonien de Rabi.

### 2.1.1 Jonction Josephson

Une jonction Josephson est constituée de deux parties d'un supraconducteur séparées par une fine couche isolante (voir figure 2.1). Elle doit son nom au fait qu'elle est le siège de l'effet Josephson, décrit ci-dessous.

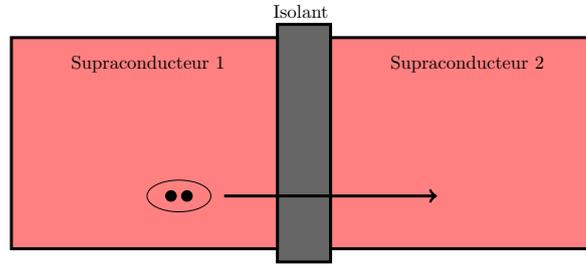


FIGURE 2.1 – Schéma d'une jonction Josephson.

Les deux parties supraconductrices de la jonction sont caractérisées par leur fonction d'onde respective

$$\psi_i = \sqrt{\rho_i} e^{i\theta_i}, \quad (2.2)$$

avec  $i = 1, 2$ ,  $\rho_i$  et  $\theta_i$  la densité de porteurs de charge et la phase du supraconducteur  $i$ . Il est judicieux d'introduire  $\delta = \theta_2 - \theta_1$ , la différence de phase entre les supraconducteurs. Si la couche d'isolant est assez fine, les paires de Cooper peuvent passer à travers par effet tunnel. On note  $K$  l'énergie de couplage entre les deux côtés et on la considère réelle. Le matériau étant le même, l'énergie interne des deux parties est égale s'il n'y a pas de différence de potentiel appliquée. En présence d'une différence de potentiel  $V$ , on peut écrire les énergies internes comme

$$U_1 = \frac{qV}{2} = eV, \quad U_2 = -\frac{qV}{2} = -eV, \quad (2.3)$$

la charge d'une paire de Cooper étant le double de la charge  $e$  d'un électron. L'équation de Schrödinger du système est  $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ , avec [23]

$$H = \begin{pmatrix} U_1 & K \\ K & U_2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

soit,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 e^{i\theta_1}) = eV\rho_1 e^{i\theta_1} + K\rho_2 e^{i\theta_2}, \quad (2.5)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 e^{i\theta_2}) = -eV\rho_1 e^{i\theta_1} + K\rho_1 e^{i\theta_1}. \quad (2.6)$$

En développant ces équations, il apparaît

$$\dot{\rho}_1 = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta, \quad (2.7)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta = -\dot{\rho}_1, \quad (2.8)$$

$$\dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (2.9)$$

Le courant dans la jonction est donné par

$$I = \frac{dQ}{dt} = 2e \int \frac{d\rho}{dt} d^3r = 2e\rho V_S, \quad (2.10)$$

si la densité de porteurs de charge est homogène, avec  $V_S$  le volume du supraconducteur. En considérant que les densités des porteurs de charge  $\rho_1$  et  $\rho_2$  diffèrent peu et sont proches de  $\rho_0$ , la densité de charge normale du supraconducteur seul, le courant à travers la jonction s'obtient en insérant l'équation (2.7) dans l'équation (2.10)

$$I = I_0 \sin \delta, \quad (2.11)$$

avec  $I_0 = 4eKV_S\rho_0/\hbar$ . Un courant circule d'un supraconducteur à l'autre à travers l'isolant, qu'une différence de potentiel soit appliquée à la jonction ou non. Ce phénomène est appelé effet Josephson continu (dc). Lorsqu'une différence de potentiel est ajoutée, la phase relative  $\delta$  varie selon l'équation (2.9), modifiant le courant. C'est l'effet Josephson alternatif (ac).

Afin de déterminer l'hamiltonien d'une jonction, il faut s'intéresser aux différentes énergies qu'elle contient. Premièrement, les paires de Cooper sont chargées. Leur déplacement va avoir pour conséquence de charger les supraconducteurs autour de la couche isolante. Ce phénomène est donc similaire à une capacité. La charge du supraconducteur 1 est notée  $2e(\frac{N}{2} + n) + q_1$  et celle du côté 2,  $2e(\frac{N}{2} - n) + q_2$ ,  $N$  étant le nombre total de paires de Cooper et  $q_1$  ( $q_2$ ) la charge due aux électrons non-appariés et aux ions du côté 1 (2). A l'équilibre, les charges des deux côtés de la jonction sont égales et  $n = n_0 = \frac{q_2 - q_1}{4e}$ . L'énergie électrostatique contenue par la capacité de la jonction est

$$E = \frac{Q^2}{2C} = E_C p^2, \quad (2.12)$$

avec  $E_C = 2e^2/C$  et  $p = (n - n_0)$ , le nombre de paires de Cooper responsables de la charge du supraconducteur.  $C$  est la capacité de la jonction et  $Q$  sa charge. Ensuite, l'énergie stockée dans la circulation du courant est donnée par,

$$E = \int IV dt = \frac{\hbar}{2e} \int I \frac{d\delta}{dt} dt = \frac{\hbar}{2e} \int I_0 \sin \delta d\delta = -E_J \cos \delta, \quad (2.13)$$

$E_J = \hbar I_0 / 2e$ . À partir de ce terme, on remarque que l'on peut associer à la jonction une inductance non-linéaire  $L = \hbar / 2e I_0 \cos \delta$ . Pour  $\delta = 0$ ,  $L = L_0 = \hbar / 2e I_0$ . L'énergie totale d'une jonction Josephson peut donc s'écrire

$$H = \frac{2e^2}{C} p^2 - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos \delta = E_C p^2 - E_J \cos \delta. \quad (2.14)$$

Les grandeurs physiques  $\delta$  et  $p$  sont canoniquement conjuguées. En effet, les équations (2.9) et (2.11) découlent des équations d'Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \delta}, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.15)$$

pour l'hamiltonien (2.14) en notant que  $\dot{p} = \frac{I}{2e}$ .

### 2.1.2 Jonctions Josephson utilisées comme qubits

Une jonction Josephson est caractérisée par le fait qu'un courant constant s'installe au travers de celle-ci dû à l'effet tunnel des paires de Cooper provoqué par la différence de phase  $\delta$ , même sans différence de potentiel de part et d'autre de la jonction. Or, ce mouvement va charger la capacité de la jonction. Une différence de potentiel est engendrée par la capacité chargée ( $V = Q/C$ ) ce qui va induire un changement de  $\delta$  selon l'équation (2.9). Celui-ci va engendrer une modification du courant et donc de la charge de la capacité, et ainsi de suite. La dérivée seconde de la phase est donnée par

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{2e}{\hbar} \frac{dV}{dt} = \frac{4e^2}{\hbar C} \frac{dp}{dt} = -\frac{2eI_0}{\hbar C} \sin \delta. \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) a la même forme que l'équation de Newton pour un pendule où  $\delta$  joue le rôle de l'angle. La jonction Josephson peut être vue comme un oscillateur non-linéaire dont les petites oscillations sont étudiées en linéarisant l'équation (2.16). Leur fréquence est donnée par la racine du coefficient devant le terme en  $\delta$ , soit  $\omega = \sqrt{2eI_0/\hbar C} = \sqrt{1/L_0 C}$ .

Pour considérer le système de façon quantique, les différentes variables dynamiques sont remplacées par les opérateurs associés [24], ce qui a pour conséquence de quantifier l'énergie du système et de faire apparaître des niveaux d'énergie discrets. Comme l'oscillateur est non-linéaire, les niveaux

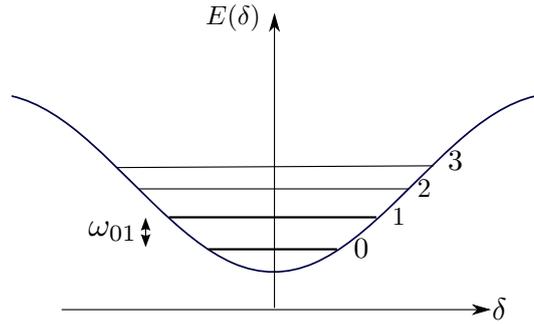


FIGURE 2.2 – Premiers niveaux d'énergie de la jonction Josephson. L'isolement des deux premiers niveaux permet la création d'un qubit.

d'énergie ne sont pas équidistants. Il est alors possible, avec une fréquence adéquate,  $\omega_{01}$  proche de  $\omega$ , de n'exciter que les deux premiers niveaux, les isolant du reste du système, (les autres transitions sont fortement non-résonnantes)

Comme les opérateurs  $\hat{\delta}$  et  $\hat{p}$  sont conjugués, ils ne commutent pas et donnent lieu à une inégalité d'Heisenberg. Il n'est pas possible de connaître avec une précision infinie la charge et la phase du qubit. Le rapport des incertitudes est lié au rapport des énergies en jeu dans le système. Si  $E_C \gg E_J$ , la charge du qubit est bien définie, le qubit est appelé qubit de charge. Au contraire, si  $E_J \gg E_C$ , le qubit est dit de phase car cette dernière est déterminée avec une grande précision. Ces différents types de qubits ont des propriétés et des applications bien distinctes.

### 2.1.3 Couplage des qubits pour l'électrodynamique quantique en cavité

Les qubits les plus utilisés afin de simuler un atome en cavité électromagnétique sont les qubits de charge. Ceux-ci sont placés dans un résonateur linéaire, formé de successions de capacités et d'inductances, possédant un mode propre stationnaire, comme illustré sur la figure 2.3. Le résonateur est

caractérisé par l'hamiltonien

$$H_R = \hbar\omega_R \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.17)$$

avec  $\omega_R = 1/\sqrt{LC}$  où  $L$  est l'inductance totale et  $C$  la capacité totale du système. L'hamiltonien du

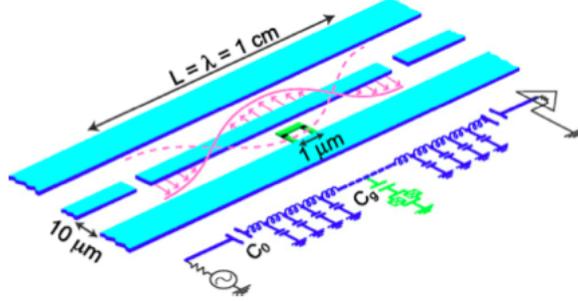


FIGURE 2.3 – Résonateur linéaire utilisé comme cavité de résonance pour les qubits de charge dans le but de simuler un système d'électrodynamique quantique en cavité. Figure tirée de [3].

qubit de charge est simplifié par le fait que l'énergie Josephson peut être vue comme une perturbation par rapport à l'énergie électrostatique [3] et au potentiel induit par le résonateur. Il devient

$$H_Q = \frac{E_J}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{\sigma}_x = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-), \quad (2.18)$$

avec  $g = \sqrt{\hbar\omega_R/c\ell} \beta e/\hbar$  la constante de couplage,  $\beta$  un paramètre dépendant des différentes capacités du circuit et de celle de la jonction,  $c$  la capacité par unité de longueur du résonateur et  $\ell$  sa longueur totale.

L'hamiltonien du système formé du résonateur et du qubit de charge

$$H = H_R + H_Q = \hbar\omega_R \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-), \quad (2.19)$$

est formellement identique à l'hamiltonien de Rabi (1.18). Cette équivalence permet d'élargir l'étude de l'électrodynamique quantique en cavité. Ces systèmes permettent d'atteindre des valeurs de couplage jusqu'à 4 ordres de grandeur supérieurs à celles obtenues avec des atomes. Cela met à défaut l'hypothèse de l'onde tournante (RWA).

## 2.2 Un spin dans un champ magnétique tournant, la RMN

Initialement, le modèle de Rabi a été introduit pour rendre compte du comportement d'un spin dans un champ magnétique tournant lors d'expériences de résonance magnétique nucléaire (RMN). L'approche du problème utilisée est semi-classique, le champ n'étant pas quantifié. L'hamiltonien s'en trouve légèrement différent de celui qui est étudié dans ce mémoire mais un parallélisme entre les deux peut être fait.

Toute particule (élémentaire ou composite) est caractérisée par une charge électrique  $q$ , une masse  $m$ , un spin  $\hat{\mathbf{S}}$ , un moment magnétique  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ , ... . Le spin et le moment magnétique sont directement liés par la relation

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = g \frac{q}{2m} \hat{\mathbf{S}} = \gamma \hat{\mathbf{S}}, \quad (2.20)$$

où  $g$  est le facteur de Landé de la particule et  $\gamma$  est appelé facteur gyromagnétique. Dans le cas de la RMN, ce sont principalement les particules de spin  $s = 1/2$  qui sont étudiées (particulièrement le proton). Dans ce cas,

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\hbar}{2}\gamma\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.21)$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  le vecteur des matrices de Pauli. Afin de lever la dégénérescence des niveaux d'énergie, le spin est plongé dans un champ magnétique homogène orienté selon l'axe  $z$  :  $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$ . À l'énergie du spin est associée l'hamiltonien

$$\hat{H}_0 = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}_0 = -\frac{1}{2}\hbar\gamma\hat{\sigma}_z B_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z, \quad (2.22)$$

où  $\omega_0 = -\gamma B_0$  est la fréquence de Larmor [1]. Classiquement, elle représente la vitesse de précession des spins autour de  $\mathbf{B}_0$  alors que quantiquement, elle équivaut à la différence d'énergie entre les états de "spin up" et de "spin down" divisée par  $\hbar$ . Le spin plongé dans le champ  $\mathbf{B}_0$  est un système à deux niveaux dont l'hamiltonien est parfaitement équivalent à celui de l'atome isolé présenté au chapitre 1. Un champ magnétique tournant dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  à la fréquence  $\omega$  est ajouté au système, comme illustré sur la figure 2.4. Ce champ dépend du temps selon  $\mathbf{B}_1(t) = B_1(\cos(\omega t)\mathbf{e}_x - \sin(\omega t)\mathbf{e}_y)$  et

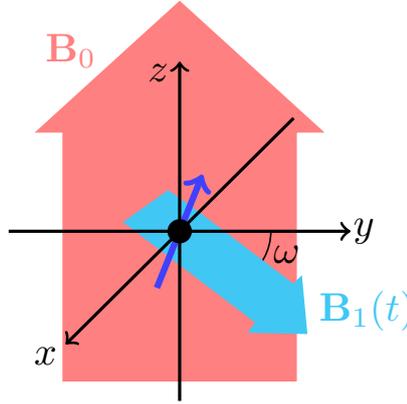


FIGURE 2.4 – Schéma d'un spin nucléaire dans un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  homogène et un champ magnétique  $\mathbf{B}_1$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ .

l'hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_1(t) = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}_1(t) \quad (2.23)$$

hérite de cette dépendance. Comme il est plus aisé de travailler avec des systèmes indépendants du temps, nous allons changer de référentiel afin de nous ramener à un tel système. Nous nous plaçons dans le référentiel tournant autour de  $\mathbf{e}_z$  à la même vitesse angulaire que  $\mathbf{B}_1$ . Nous avons alors  $\mathbf{B}'_1 = B_1\mathbf{e}'_x$  et  $\mathbf{B}'_0 = B'_0\mathbf{e}'_z = B'_0\mathbf{e}_z$ . Alors que dans le référentiel fixe, nous avons  $B_0 = -\omega_0/\gamma$ , il n'en est plus ainsi dans le référentiel tournant. En effet, la fréquence de précession des spins autour de  $\mathbf{B}_0$  est maintenant  $\omega_0 - \omega$  et  $B'_0 = -(\omega_0 - \omega)/\gamma$ . Le champ effectif total ressenti par le spin est  $\mathbf{B}' = B'_1\mathbf{e}'_x + B'_0\mathbf{e}'_z$ . L'hamiltonien du système peut se mettre sous la forme

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}' = \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_{z'} + \frac{\hbar\omega_1}{2}\hat{\sigma}_{x'}, \quad (2.24)$$

où  $\Delta = \omega - \omega_0$  est le désaccord entre la fréquence de rotation de  $\mathbf{B}_1$  et la fréquence de Larmor associée à  $\mathbf{B}_0$  et  $\omega_1 = -\gamma B_1$  est la fréquence de Larmor associée à  $\mathbf{B}_1$  [25]. Cet hamiltonien est la version semi-classique de l'hamiltonien de Rabi. Nous y retrouvons la partie du système à deux niveaux, avec

une fréquence de transition  $\Delta$ . La deuxième partie de l'hamiltonien représente l'interaction avec le champ, proportionnelle à la matrice de Pauli  $\hat{\sigma}_x$ .

Lorsque le champ magnétique est traité quantiquement plutôt que comme une perturbation extérieure, il est décrit par l'opérateur hermitique

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} iB_{\omega_k} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}\epsilon} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \times \boldsymbol{\epsilon} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \times \boldsymbol{\epsilon} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right], \quad (2.25)$$

où  $B_{\omega_k} = \sqrt{\hbar\omega_k/2\epsilon_0cV}$  [18]. Il faut également tenir compte de son énergie, ce qui ajoute un terme du type  $\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ . Il s'ensuit que le terme d'interaction  $-\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$  est modifié par la présence des opérateurs  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$ , et donne lieu, pour un choix judicieux de coordonnées, à un hamiltonien analogue à celui de Rabi totalement quantique (1.18).



# Chapitre 3

## Modèle de Jaynes-Cummings

Dans le chapitre 1, nous avons expliqué qu'il est possible de simplifier le modèle de Rabi lorsque le couplage entre l'atome et le champ est faible. Il est remplacé par le modèle de Jaynes-Cummings que l'on peut facilement traiter analytiquement. Dans ce chapitre, nous dérivons les résultats bien connus donnés par le modèle de Jaynes-Cummings. Dans un premier temps, nous calculons ses énergies et états propres en utilisant la conservation du nombre d'excitations du système. Ensuite, nous détaillons le phénomène de répulsion entre les niveaux d'énergie, signature du couplage entre ces niveaux. Enfin, nous présentons la dynamique du système et nous nous intéressons plus particulièrement à deux cas particuliers, celui des oscillations de Rabi et celui du Collapse-revival de la fonction d'onde.

### 3.1 Etats habillés

Le modèle de Jaynes-Cummings est obtenu à partir du modèle de Rabi à l'aide de l'approximation de l'onde tournante (RWA)[26]. Elle permet de négliger les termes non-résonnants qui apparaissent dans l'hamiltonien de ce dernier, menant à l'hamiltonien de Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (3.1)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (3.2)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g (\hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^+ \hat{a}), \quad (3.3)$$

où  $\omega_L$  est la fréquence du mode du champ électromagnétique couplé à l'atome,  $\omega_0$  est la fréquence de transition atomique,  $g$  est la constante de couplage,  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  sont les opérateurs de création et d'annihilation des photons du champ,  $\hat{\sigma}^+$  et  $\hat{\sigma}^-$  sont les opérateurs de sauts atomiques et  $\hat{\sigma}_z$  est la matrice de Pauli. La dynamique de cet hamiltonien est bien connue car il ne couple que deux niveaux à la fois, ce qui simplifie l'étude du système.

L'action de l'hamiltonien d'interaction  $\hat{H}_{\text{int}}$  sur les états propres de l'hamiltonien non-couplé  $\hat{H}_0$  permet de séparer l'espace d'Hilbert en sous-espaces de dimension 2 regroupant des états d'énergie proches [26], comme vu dans la section 1.4. L'état  $|e, n\rangle$  n'est alors couplé qu'à l'état  $|g, n+1\rangle$  et ils engendrent le sous-espace à  $N = n+1$  excitations, valeur propre de l'opérateur nombre d'excitations (1.46)

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-. \quad (3.4)$$

Le nombre d'excitations  $N$  peut donc servir de dénomination au sous-espace. L'hamiltonien total exprimé dans la base des états propres non-couplés prend la forme d'une matrice bloc diagonale,

chaque bloc correspondant à un sous-espace de dimension 2 introduit ci-dessus. Le bloc relatif à  $N = n + 1$  excitations s'écrit

$$H_N = \begin{pmatrix} E_{|e,N-1\rangle} & \hbar\Omega_N/2 \\ \hbar\Omega_N/2 & E_{|g,N\rangle} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

où  $E_{|e,N-1\rangle}$  et  $E_{|g,N\rangle}$  sont respectivement égaux à  $(N-1)\hbar\omega_L + \hbar\omega_0/2$  et  $N\hbar\omega_L - \hbar\omega_0/2$ , et

$$\Omega_N = 2g\sqrt{N} \quad (3.6)$$

est la fréquence de Rabi caractérisant l'intensité du couplage atome-champ. La diagonalisation de la

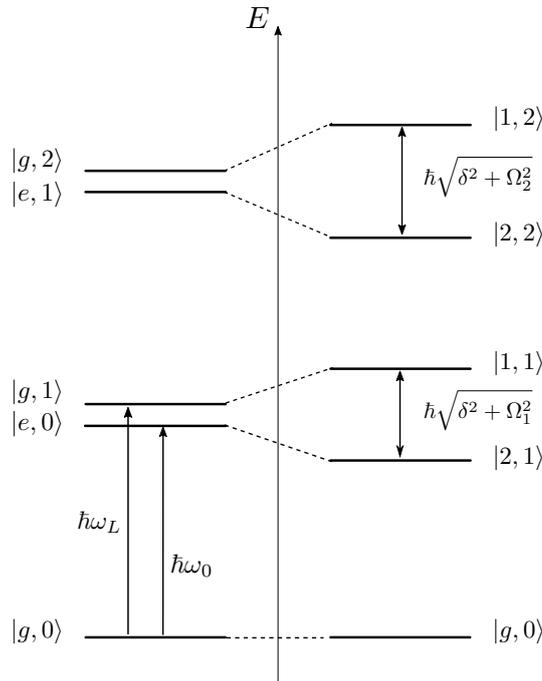


FIGURE 3.1 – Schéma des états non-couplés (à gauche) et des états couplés de  $\hat{H}_N$  (à droite) de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings pour  $\delta > 0$ .

matrice (3.5) donne les états dits habillés

$$|1, N\rangle = \cos \theta_N |e, N-1\rangle + \sin \theta_N |g, N\rangle, \quad (3.7)$$

$$|2, N\rangle = -\sin \theta_N |e, N-1\rangle + \cos \theta_N |g, N\rangle, \quad (3.8)$$

d'énergie respective

$$E_{|1,N\rangle} = (N-1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar}{2} \left( \delta + \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2} \right), \quad (3.9)$$

$$E_{|2,N\rangle} = (N-1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar}{2} \left( \delta - \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2} \right). \quad (3.10)$$

Dans les relations (3.7) et (3.8), l'angle  $\theta_N$  est donné par la relation  $\cot 2\theta_N = -\delta/\Omega_N$ . Les niveaux d'énergies sont représentés sur la figure 3.1 pour une valeur positive du désaccord en fréquence  $\delta = \omega_L - \omega_0$ .

## 3.2 Répulsion de niveaux

La répulsion de niveaux est un phénomène générique qui apparaît dans tous les systèmes quantiques [27]. Lorsqu'il existe un couplage entre les niveaux d'énergie d'un système, ceux-ci ne peuvent se croiser. S'ils étaient dégénérés avant l'introduction du couplage, celui-ci lève la dégénérescence. C'est ce phénomène qu'on appelle répulsion de niveaux.

L'étude de la répulsion de niveaux est utile pour la connaissance des énergies du système, pour les expériences de spectroscopie, mais également d'un point de vue dynamique. Dans les années 30, Landau et Zener ont quantifié le taux de transitions non-adiabatiques dans des systèmes dont un paramètre dépend du temps. Prenons le cas d'un système à deux niveaux,  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , dont l'hamiltonien dépend d'un paramètre  $q$ . Les énergies du système dépendent de ce paramètre et sont dégénérées pour une certaine valeur de celui-ci,  $q_0$ . L'introduction d'un couplage  $\hat{W}$  lève la dégénérescence, comme illustré sur la figure 3.2 dans le cas de deux niveaux de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings. L'hamiltonien du

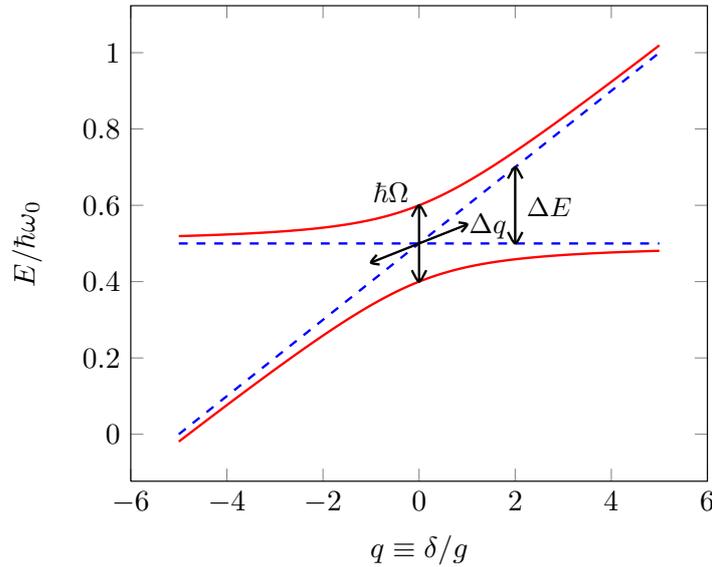


FIGURE 3.2 – Répulsion des états propres de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings pour  $N = 1$  excitation.

système prend la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{21} & E_2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

où  $W_{12} = W_{21} = \langle 1|\hat{W}|2\rangle$  est le couplage entre les deux niveaux. Il est directement lié à la différence d'énergie  $\hbar\Omega$  découlant de la répulsion des niveaux en  $q_0$  par la relation  $\hbar\Omega = 2W_{12}$ . Supposons qu'initialement le système est tel que  $q$  possède une grande valeur et que l'on se trouve dans l'état propre de plus haute énergie. Si la valeur de  $q$  évolue dans le temps jusqu'à passer par  $q_0$ , le système peut avoir plusieurs comportements. Soit il reste dans l'état propre de plus haute énergie, on dit alors qu'il a traversé la répulsion de niveaux de manière adiabatique, soit le système passe à l'état propre de plus basse énergie et il effectue une transition diabatique, ou non-adiabatique. Si la différence entre les énergies des niveaux non-couplés varie linéairement avec  $q$ , la probabilité que le système effectue

une transition adiabatique est donnée par la formule de Landau-Zener [28]

$$P_D = \exp\left(\frac{-2\pi|W_{12}|^2}{\hbar d(\Delta E)/dt|_{q=q_0}}\right) = \exp\left(\frac{-2\pi\hbar\Omega^2}{4 d(\Delta E)/dt|_{q=q_0}}\right), \quad (3.12)$$

où  $\Delta E(q)$  est la différence d'énergie entre les deux niveaux non-couplés et  $\frac{d(\Delta E)}{dt} = \frac{d(\Delta E)}{dq} \frac{dq}{dt}$  est le taux de variation de l'énergie. Il y a une compétition directe entre la variation temporelle de l'hamiltonien et l'amplitude de la répulsion. Si la variation de l'énergie est lente, ou que l'amplitude de répulsion est importante, la probabilité d'effectuer une transition adiabatique tend vers zéro. Le système varie adiabatiquement et ses états propres sont modifiés assez lentement pour que le système reste toujours dans l'un de ceux-ci. Plus particulièrement, il restera dans l'état propre provenant de la modification continue de l'état initial dans lequel il se trouvait. Il reste sur la même branche d'énergie, supérieure ou inférieure, voir figure 3.2. Au contraire, si la variation temporelle de l'énergie est rapide, ou pour un couplage trop faible, le système a une grande probabilité de changer d'état en effectuant une transition adiabatique. Il franchit la répulsion des niveaux. Ces transitions sont appelées transitions de Landau-Zener. Les paramètres pertinents dans l'étude de ces transitions sont l'amplitude de la répulsion  $\hbar\Omega$  et sa largeur, donnée par

$$\Delta q = \frac{\Omega}{d(\Delta E)/dq|_{q=q_0}}. \quad (3.13)$$

Dans le cas de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, les états non-couplés, états propres de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$  donné par (3.2), sont indépendants les uns des autres. Un paramètre dont dépend l'hamiltonien est le désaccord en fréquence,  $\delta = \omega_L - \omega_0$  et ses énergies dépendent linéairement de ce paramètre. À la résonance, les niveaux  $|e, N-1\rangle$  et  $|g, N\rangle$  sont dégénérés. Il y a un croisement entre ces niveaux. Lorsqu'un couplage est introduit, leur dépendance en  $\delta$  change, empêchant la dégénérescence d'avoir lieu [26]. Les niveaux d'énergie qui sont liés par le couplage se repoussent, comme illustré sur la figure 3.3. L'amplitude de la répulsion est  $E_{1,N} - E_{2,N} = \hbar\Omega_N = 2g\sqrt{N}$ . Elle est d'autant plus élevée que le couplage et donc le nombre d'excitations est grand. Comme l'hamiltonien de Jaynes-Cummings ne couple que des niveaux de même nombre d'excitations, les niveaux correspondant à  $N=1$  et  $N=2$  se croisent pour des valeurs négatives de désaccord en fréquence. Le niveau  $|g, 0\rangle$  est le seul à ne posséder aucune excitation et est totalement découplé. Lorsque  $\delta/g \rightarrow \infty$ , les niveaux d'énergie ont une évolution linéaire en  $\delta$ , caractéristique des états non-couplés. Pour  $\delta > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \infty} E_1 &= (N-1)\hbar(\omega_0 + \delta) + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\delta \\ &= E_{|g,N\rangle}, \\ \lim_{\delta \rightarrow \infty} E_2 &= (N-1)\hbar(\omega_0 + \delta) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \\ &= E_{|e,N-1\rangle}, \end{aligned}$$

et pour  $\delta < 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow -\infty} E_1 &= (N-1)\hbar(\omega_0 + \delta) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \\ &= E_{|e,N-1\rangle}, \\ \lim_{\delta \rightarrow -\infty} E_2 &= (N-1)\hbar(\omega_0 + \delta) + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\delta \\ &= E_{|g,N\rangle}. \end{aligned}$$

Cela s'explique par le fait que les niveaux ont une énergie tellement différente que le couplage ne se fait plus ressentir.

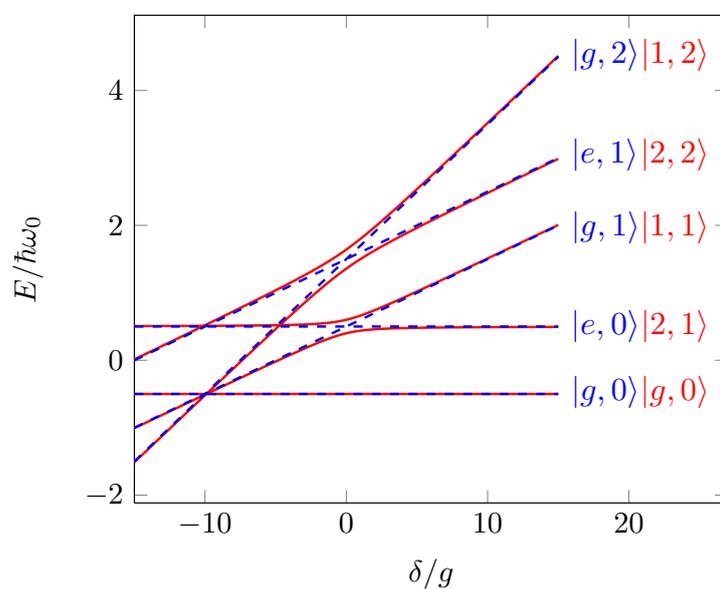


FIGURE 3.3 – Évolution des niveaux d'énergie non-couplés (en pointillés bleus) et couplés (en traits pleins rouges) en fonction de  $\delta/g$ , pour  $\omega_0$  fixé. Les niveaux non-couplés sont dégénérés deux à deux en  $\delta = 0$ . Les niveaux correspondant aux états habillés  $|1, N\rangle$  et  $|2, N\rangle$  se repoussent, à cause du couplage. Les niveaux à une et à deux excitations ne sont pas couplés et se croisent. Le niveau  $|g, 0\rangle$  n'est couplé à aucun niveau et reste inchangé d'une base à l'autre.

### 3.3 Dynamique du système

L'inversion des relations (3.7) et (3.8) donne une expression pour les états non-couplés en fonction des états habillés

$$|e, N-1\rangle = \cos \theta_N |1, N\rangle - \sin \theta_N |2, N\rangle, \quad (3.14)$$

$$|g, N\rangle = \sin \theta_N |1, N\rangle + \cos \theta_N |2, N\rangle. \quad (3.15)$$

Ces expressions permettent de calculer la dynamique du système pour un état initial donné. Soit l'état initial

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= c_{g,0} |g, 0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty} \left( c_{e,N-1}(0) |e, N-1\rangle + c_{g,N}(0) |g, N\rangle \right) \\ &= c_{g,0} |g, 0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty} \left( c_{1,N}(0) |1, N\rangle + c_{2,N}(0) |2, N\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec

$$c_{1,N}(0) = c_{e,N-1}(0) \cos \theta_N + c_{g,N}(0) \sin \theta_N, \quad (3.17)$$

$$c_{2,N}(0) = -c_{e,N-1}(0) \sin \theta_N + c_{g,N}(0) \cos \theta_N. \quad (3.18)$$

Le vecteur d'état du système est donné à tout instant  $t$  par

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= c_{g,0} e^{-iE_{g,0}t/\hbar} |g, 0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty} \left( c_{1,N}(0) e^{-iE_1 t/\hbar} |1, N\rangle + c_{2,N}(0) e^{-iE_2 t/\hbar} |2, N\rangle \right) \\ &= c_{g,0} e^{-iE_{g,0}t/\hbar} |g, 0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty} e^{-iE_1 t/\hbar} \left( c_{1,N}(0) |1, N\rangle + c_{2,N}(0) e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} |2, N\rangle \right) \\ &= c_{g,0} e^{-i\omega_0 t/2} |g, 0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty} e^{-iE_1 t/\hbar} \left( c_{e,N-1}(t) |e, N-1\rangle + c_{g,N}(t) |g, N\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec

$$c_{e,N-1}(t) = (\cos^2 \theta_N + \sin^2 \theta_N e^{i\Omega_{R,N}t}) c_{e,N-1}(0) + (1 - e^{i\Omega_{R,N}t}) \sin \theta_N \cos \theta_N c_{g,N}(0), \quad (3.20)$$

$$c_{g,N}(t) = (1 - e^{i\Omega_{R,N}t}) \sin \theta_N \cos \theta_N c_{e,N-1}(0) + (\sin^2 \theta_N + e^{i\Omega_{R,N}t} \cos^2 \theta_N) c_{g,N}(0), \quad (3.21)$$

et

$$\Omega_{R,N} = \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad (3.22)$$

la fréquence de Rabi généralisée.

#### 3.3.1 Oscillations de Rabi

Si initialement le système est dans un état propre  $|g, N\rangle$  de  $\hat{H}_0$ , nous avons  $c_{g,N}(0) = 1$ ,  $c_{e,N-1}(0) = 0 = c_{g,m}(0) = c_{e,m}(0) \forall m \neq N$ , et la relation (3.19) devient

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_1 t/\hbar} \left[ (1 - e^{i\Omega_{R,N}t}) \sin \theta_N \cos \theta_N |e, N-1\rangle + (\sin^2 \theta_N + e^{i\Omega_{R,N}t} \cos^2 \theta_N) |g, N\rangle \right]. \quad (3.23)$$

La probabilité de transition de l'état  $|g, N\rangle$  vers l'état  $|e, N-1\rangle$  est donnée par le carré du module de la projection de la fonction d'onde sur cet état

$$\begin{aligned} P_{|g,N\rangle \rightarrow |e,N-1\rangle}(t) &= |\langle e, N-1 | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= |(1 - e^{i\Omega_{R,N}t}) \sin \theta_N \cos \theta_N|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(2\theta_N) [1 - \cos(\Omega_{R,N}t)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$= \sin^2(2\theta_N) \sin^2\left(\frac{\Omega_{R,N}t}{2}\right). \quad (3.25)$$

La probabilité de transition oscille à la fréquence de Rabi généralisée avec une amplitude  $\sin^2(2\theta_N)$ , maximale (transfert total de la population) si  $\delta = 0$ . Ce phénomène est appelé oscillations de Rabi. Ces oscillations sont dues au fait que le système ne se trouve initialement pas dans un de ses états propres (stationnaires). Elles sont illustrées sur la figure 3.4 pour différentes valeurs de désaccord en fréquence  $\delta$ . Nous remarquons que la probabilité d'être dans l'état  $|e, N - 1\rangle$  n'atteint 1 que lorsque  $\delta$  est nul, c'est-à-dire à la résonance. Dans les autres cas, il n'y aura donc jamais de transfert total de population.

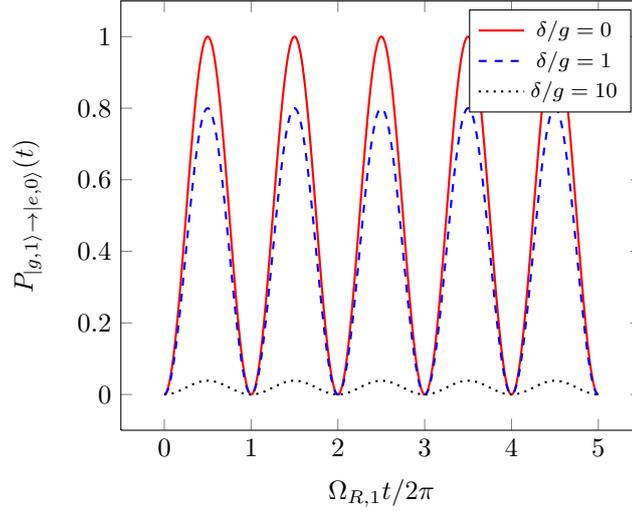


FIGURE 3.4 – Oscillations de Rabi pour différentes valeurs de  $\delta/g$ , pour un couplage  $g/\omega_0 \rightarrow 0$  dans le sous-espace  $N = 1$ .

### 3.3.2 Collapse-revival

Si initialement, l'atome est dans l'état fondamental et le champ dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$ ,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \otimes |g\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |g, N\rangle, \quad (3.26)$$

$c_{g,N}(0) = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^N / \sqrt{N!}$  et  $c_{e,N}(0) = 0$ . L'évolution temporelle du système est donnée par (3.19) avec

$$c_{g,N}(t) = (\sin^2 \theta_N + \cos^2 \theta_N e^{i\Omega_{R,N}t}) e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}}, \quad (3.27)$$

$$c_{e,N-1}(t) = (1 - e^{i\Omega_{R,N}t}) \sin \theta_N \cos \theta_N e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}}. \quad (3.28)$$

La probabilité de trouver l'atome dans l'état  $|e\rangle$  à un instant  $t$  est donnée par

$$P_{g \rightarrow e}(t) = \sum_{N=1}^{\infty} |\langle e, N-1 | \psi(t) \rangle|^2. \quad (3.29)$$

Le calcul est similaire à celui des oscillations de Rabi. La probabilité de transition est alors une somme d'oscillations de Rabi de fréquence et d'amplitude différentes

$$P_{g \rightarrow e}(t) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha^N|^2}{N!} \sin^2(2\theta_N) \sin^2\left(\frac{\Omega_{R,N}t}{2}\right). \quad (3.30)$$

Cette dynamique est appelée collapse-revival [26] car, comme le montre la figure 3.5, la probabilité de transition oscille pour commencer, se stabilise ensuite à une certaine valeur (c'est le collapse), recommence à osciller (c'est le revival), et ainsi de suite.

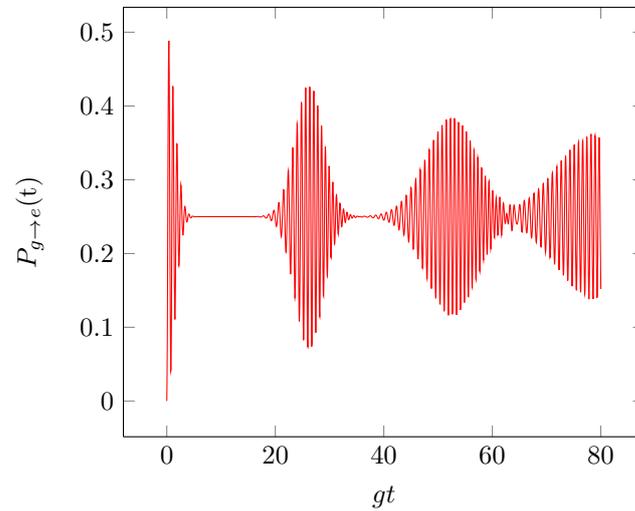


FIGURE 3.5 – Collapse-revival de la probabilité de transition entre les états  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  de l'atome, pour un couplage  $g/\omega_0 \rightarrow 0$ , un désaccord  $\delta = 0$  et un état cohérent  $|\alpha\rangle$  avec le paramètre  $\alpha = 6$ .

## Chapitre 4

# Solution analytique au modèle de Rabi

La première solution analytique au modèle de Rabi est due à Braak en 2011 [13]. Depuis, de nombreux auteurs ont apporté leur contribution à l'étude de ces solutions [15, 16, 17], proposant parfois d'autres chemins pour y parvenir. Dans ce chapitre, nous présentons en détails la résolution proposée par Braak, pour ensuite la comparer, dans le chapitre suivant, à un modèle numérique. La résolution analytique repose sur la représentation de Bargmann, appelée également représentation analytique, qui a été introduite par V. Bargmann dans les années 60 [14]. C'est un formalisme permettant d'associer à toute fonction d'onde appartenant à un espace d'Hilbert de dimension finie ou infinie une fonction analytique<sup>1</sup> à variable complexe, définie sur l'espace de Bargmann. À la section 4.1, nous introduisons la représentation de Bargmann pour l'oscillateur harmonique, avant de la particulariser au modèle de Rabi dans la section 4.2.1 afin de l'utiliser dans la recherche des énergies et états propres de l'hamiltonien.

### 4.1 Représentation de Bargmann

L'oscillateur harmonique est habituellement étudié dans l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ , dont une base naturelle est formée par les états propres de son hamiltonien  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ . Ceux-ci sont les états à  $n$  excitations, notés  $|n\rangle$  et appelés états de Fock. D'autres états remarquables de l'oscillateur harmonique sont les états cohérents

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle, \quad (4.1)$$

caractérisés par un paramètre complexe  $z$  et états propres de l'opérateur de destruction  $\hat{a}$  de valeur propre  $z$ . Les bras correspondant à ces états sont

$$\langle z| = e^{-|z|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{*m}}{\sqrt{m!}} \langle m|. \quad (4.2)$$

Les états cohérents forment une base surcomplète de l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  car ils ne sont pas orthogonaux mais vérifient la relation de complétude [29]

$$\frac{1}{\pi} \int \int d^2z |z\rangle \langle z| = \hat{1}, \quad (4.3)$$

---

1. Une fonction analytique est une fonction dont la variable peut être réelle ou complexe et qui est développable en série au voisinage de chacun des points de son domaine.

où l'intégration porte sur tout le plan complexe. A chaque état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  est associé une fonction analytique  $\psi(z) \in \mathcal{B}$

$$\psi(z) \equiv e^{|z|^2/2} \langle z^* | \psi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \langle m | \psi \rangle, \quad (4.4)$$

appelée fonction de Bargmann [30] et qui représente la projection de  $|\psi\rangle$  sur l'état cohérent  $|z\rangle$ . Inversement, comme toute fonction analytique  $f(z)$  peut être développée en série de façon unique, on peut lui associer un ket  $|f\rangle \in \mathcal{H}$  tel que le développement de  $f(z)$  s'écrive sous la forme (4.4). Il y a donc une correspondance un à un entre les fonctions analytiques de  $\mathcal{B}$  et les kets de  $\mathcal{H}$ . L'espace de Bargmann  $\mathcal{B}$  est isomorphe à  $\mathcal{H}$ . C'est un espace d'Hilbert de fonctions analytiques muni du produit scalaire [29]

$$(\psi | \phi) = \frac{1}{\pi} \int \int d^2z e^{-|z|^2} \psi(z)^* \phi(z). \quad (4.5)$$

Pour appartenir à  $\mathcal{B}$ , la fonction  $\psi(z)$  doit avoir une norme  $(\psi | \psi) < \infty$ .

Les actions des opérateurs de destruction et de création peuvent être transposées dans l'espace de Bargmann comme suit

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |\psi\rangle &\rightarrow e^{|z|^2/2} \langle z^* | \hat{a}^\dagger | \phi \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \langle m | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{(m-1)!}} \langle m-1 | \psi \rangle \\ &= z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \langle m | \psi \rangle \\ &= z \psi(z) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{a} |\psi\rangle &\rightarrow e^{|z|^2/2} \langle z^* | \hat{a} | \phi \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \langle m | \hat{a} | \psi \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \sqrt{m+1} \langle m+1 | \psi \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m z^{m-1}}{\sqrt{m!}} \langle m | \psi \rangle \\ &= \frac{d}{dz} \psi(z). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous avons donc la correspondance

$$|\psi\rangle \rightarrow \psi(z), \quad \hat{a} |\psi\rangle \rightarrow \frac{d}{dz} \psi(z), \quad \hat{a}^\dagger |\psi\rangle \rightarrow z \psi(z). \quad (4.8)$$

entre les espaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{B}$ . À partir de la fonction de Bargmann, il est simple de retrouver l'état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ . En effet,

$$\frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(m!)}{(m-n)!} \frac{z^{m-n}}{\sqrt{m!}} \langle m | \psi \rangle, \quad (4.9)$$

et si  $z$  tend vers 0, il ne reste dans cette somme que le terme indépendant en  $z$  pour lequel  $m = n$

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) \right|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle n | \psi \rangle. \quad (4.10)$$

Nous obtenons alors  $|\psi\rangle$  exprimé dans la base des états de Fock  $|n\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) \Big|_{z=0} |n\rangle. \quad (4.11)$$

La bijection entre l'espace  $\mathcal{H}$  et l'espace  $\mathcal{B}$  permet d'étudier le système indifféremment dans un de ces espaces et de passer facilement de l'un à l'autre.

## 4.2 Résolution du modèle de Rabi dans l'espace de Bargmann

### 4.2.1 Représentation de Bargmann pour le modèle de Rabi

Les états propres du système "atome + champ électromagnétique" non-couplés sont les produits tensoriels d'un état de Fock  $|n\rangle$  (pour le champ électromagnétique) avec un des deux états de l'atome,  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ . Sous l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, ces niveaux sont couplés deux par deux, suivant leur nombre d'excitations donné par l'opérateur d'excitations  $\hat{N}$  (voir équation (1.46)). L'hamiltonien de Rabi possède des termes non-résonnants qui changent le nombre d'excitations et celui-ci n'est plus conservé. Néanmoins, tous les niveaux ne peuvent pas être excités à partir d'un état initial donné car la parité [21]

$$\hat{P} = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_z, \quad (4.12)$$

avec  $(-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}$  l'opérateur parité du nombre de photons et  $\hat{\sigma}_z$  l'opérateur parité de l'atome, est conservée (voir section 1.4). Cela permet de diviser l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  du système en une somme directe de deux sous-espaces infinis,  $\mathcal{H}_+$  et  $\mathcal{H}_-$  de parités respectives  $+1$  et  $-1$ , comme expliqué dans la section 1.4. Les éléments d'un sous-espace sont appelés des chaînes de parité. La projection d'un état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_+$  sur un état cohérent  $|z\rangle$  peut toujours s'écrire sous la forme

$$e^{|z|^2/2} \langle z^* | \psi \rangle = \psi_s(z) |e\rangle + \psi_a(z) |g\rangle, \quad (4.13)$$

avec

$$\psi_s(z) = \frac{1}{2} [\psi(z) + \psi(-z)], \quad (4.14)$$

$$\psi_a(z) = \frac{1}{2} [\psi(z) - \psi(-z)], \quad (4.15)$$

les parties symétrique et antisymétrique de la fonction de Bargmann  $\psi(z)$  associées à la partie champ électromagnétique de l'état  $|\psi\rangle$ , comme décrit dans la section 4.1. Cette forme est justifiée par la conservation de la parité. L'état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_+$  étant de parité positive et  $|e\rangle$  de parité positive, son coefficient  $\psi_s(z)$  ne peut être qu'une fonction paire. De la même façon, le coefficient  $\psi_a(z)$  de  $|g\rangle$  doit être une fonction impaire. Comme pour l'oscillateur harmonique, il y a un isomorphisme entre l'espace de Bargmann  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{H}_+$ . De la même façon, les éléments de  $\mathcal{H}_-$  s'écrivent

$$e^{|z|^2/2} \langle z^* | \psi \rangle = \psi_a(z) |e\rangle + \psi_s(z) |g\rangle. \quad (4.16)$$

Ces relations permettent de retrouver les composantes d'un état quelconque dans la base des états non-couplés à partir de sa fonction de Bargmann. Si  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_+$ ,

$$\langle e, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_s(z) \Big|_{z=0}, \quad (4.17)$$

$$\langle g, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_a(z) \Big|_{z=0}, \quad (4.18)$$

et si  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_-$ ,

$$\langle e, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_a(z) \Big|_{z=0}, \quad (4.19)$$

$$\langle g, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_s(z) \Big|_{z=0}. \quad (4.20)$$

### 4.2.2 Hamiltonien dans l'espace de Bargmann

L'hamiltonien de Rabi donné par l'expression (1.18)

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hbar\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (4.21)$$

commute avec l'opérateur parité  $\hat{P}$ . Ses états propres vont pouvoir être cherchés dans les sous-espaces de parité positive ( $\mathcal{H}_+$ ) et négative ( $\mathcal{H}_-$ ) indépendamment et de façon similaire. Dans ce but, nous allons diagonaliser  $H_{\text{Rabi}}$  en effectuant pour commencer un changement de base afin de travailler avec les états propres de  $\hat{\sigma}_x$ . L'hamiltonien pourra être traité dans la base des états propres de  $\sigma_x$  de la même façon que dans celle des états propres de  $\sigma_z$  car le changement de base est unitaire. Les matrices de Pauli sont habituellement écrites dans la base des états propres de  $\hat{\sigma}_z$ ,  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En effectuant la transformation unitaire

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{\sigma}_y e^{-i\pi\hat{\sigma}_y/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

sur les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , nous obtenons les états propres de  $\hat{\sigma}_x$

$$\hat{U}_1 |e\rangle = |\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle), \quad (4.24)$$

$$\hat{U}_1 |g\rangle = |\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle - |g\rangle), \quad (4.25)$$

et l'axe  $x$  devient l'axe de quantification à la place de l'axe  $z$ . Dans la base donnée par ces états, les matrices de Pauli s'écrivent

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Ensuite, utilisons la représentation de Bargmann introduite dans la section 4.2.1. Les opérateurs de destruction et de création deviennent

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow z, \quad \hat{a} \rightarrow \frac{d}{dz}, \quad (4.27)$$

où  $z$  est un nombre complexe. Les états du système sont représentés par un spineur de fonctions analytiques de variable complexe  $z$ ,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow e^{|z|^2/2} \langle z^* | \psi \rangle = \psi_{\uparrow_x}(z) |\uparrow_x\rangle + \psi_{\downarrow_x}(z) |\downarrow_x\rangle \\ &\equiv \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow_x}(z) \\ \psi_{\downarrow_x}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans la base  $\{\psi_{\uparrow_x}(z)|\uparrow_x\rangle, \psi_{\downarrow_x}(z)|\downarrow_x\rangle\}$ , l'hamiltonien de Rabi prend la forme

$$H_{\text{Rabi}} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} + \hbar g(z + \frac{d}{dz}) & \hbar\omega_0/2 \\ -\hbar\omega_0/2 & \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} - \hbar g(z + \frac{d}{dz}) \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Pour obtenir la forme diagonale de cette matrice, nous appliquons une transformation unitaire

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \hat{T} \\ 1 & -\hat{T} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

faisant intervenir l'opérateur de réflexion  $\hat{T}$  défini par son action sur les fonctions de Bargmann

$$(\hat{T}\psi)(z) = \psi(-z). \quad (4.31)$$

Les actions de l'opérateur  $\hat{T}$  sur les différentes parties composant l'hamiltonien de Rabi sont

$$\begin{aligned} \left( \hat{T} z \frac{d}{dz} \hat{T} \right) \psi(z) &= \hat{T} \left( z \frac{d}{dz} \psi(-z) \right) \\ &= (-z) \left( -\frac{d}{dz} \psi(z) \right) \\ &= z \frac{d}{dz} \psi(z), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{T} \left( z + \frac{d}{dz} \right) \hat{T} \right] \psi(z) &= \hat{T} \left[ \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi(-z) \right] \\ &= - \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi(z). \end{aligned} \quad (4.33)$$

La fonction d'onde se transforme comme

$$\hat{U}_2 \psi(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow_x}(z) + \psi_{\downarrow_x}(-z) \\ \psi_{\uparrow_x}(z) - \psi_{\downarrow_x}(-z) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

et l'hamiltonien de Rabi devient

$$\begin{aligned} \hat{U}_2 H_{\text{Rabi}} \hat{U}_2^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{T} \\ 1 & -\hat{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} + \hbar g(z + \frac{d}{dz}) & \hbar\omega_0/2 \\ -\hbar\omega_0/2 & \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} - \hbar g(z + \frac{d}{dz}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hat{T} & -\hat{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} + \hbar g(z + \frac{d}{dz}) + \hat{T}\hbar\omega_0/2 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} + \hbar g(z + \frac{d}{dz}) - \hat{T}\hbar\omega_0/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$= \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

L'hamiltonien ayant une structure bloc diagonale, nous pouvons traiter en deux parties le système, indépendamment dans les sous-espaces  $\mathcal{H}_\pm$ , où il est régi par l'hamiltonien  $H_\pm = \hbar\omega_L z \frac{d}{dz} + \hbar g(z + \frac{d}{dz}) \pm \hat{T}\hbar\omega_0/2$  de dimension deux fois plus petite que  $H_{\text{Rabi}}$ .

### 4.2.3 Résolution de l'équation de Schrödinger dans $\mathcal{H}_+$

Nous allons chercher les états propres de l'hamiltonien de Rabi dans le sous-espace  $\mathcal{H}_+$ . La résolution dans  $\mathcal{H}_-$  est tout à fait similaire. Dans  $\mathcal{H}_+$ , l'équation de Schrödinger indépendante du temps à résoudre s'écrit

$$\hbar\omega_L z \frac{d}{dz} \psi(z) + \hbar g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi(z) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \psi(-z) = E\psi(z), \quad (4.37)$$

où  $\psi(z)$  est une fonction analytique sur tout le plan complexe si  $E$  est bien une valeur propre de l'hamiltonien. Afin de simplifier les calculs et leurs écritures, nous mettons l'équation (4.37) sous forme adimensionnelle et nous introduisons des notations simplifiées

$$z \frac{d}{dz} \psi(z) + g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi(z) + \Delta \psi(-z) = \mathcal{E} \psi(z), \quad (4.38)$$

où

$$g = \frac{g}{\omega_L}, \quad \Delta = \frac{\omega_0}{2\omega_L}, \quad \mathcal{E} = \frac{E}{\hbar\omega_0}. \quad (4.39)$$

En écrivant  $\psi(z) = \chi_1(z)$  et  $\psi(-z) = \chi_2(z)$ , nous obtenons un système de deux équations couplées

$$(z + g) \frac{d}{dz} \chi_1(z) = (\mathcal{E} - gz) \chi_1(z) - \Delta \chi_2(z), \quad (4.40)$$

$$(z - g) \frac{d}{dz} \chi_2(z) = (\mathcal{E} + gz) \chi_2(z) - \Delta \chi_1(z). \quad (4.41)$$

En appliquant le changement de variables

$$y = z + g, \quad x = \mathcal{E} + g^2, \quad (4.42)$$

et l'ansatz

$$\Psi_1(y) = e^{-gy+g^2} \chi_1(y), \quad (4.43)$$

$$\Psi_2(y) = e^{-gy+g^2} \chi_2(y), \quad (4.44)$$

nous obtenons les équations

$$y \frac{d}{dy} \Psi_1(y) = x \Psi_1(y) - \Delta \Psi_2(y), \quad (4.45)$$

$$(y - 2g) \frac{d}{dy} \Psi_2(y) = (x - 4g^2 + 2gy) \Psi_2 - \Delta \Psi_1. \quad (4.46)$$

Exprimons les fonctions  $\Psi_1(y)$  et  $\Psi_2(y)$  comme des séries entières en puissance de  $y$

$$\Psi_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(x) y^n, \quad (4.47)$$

$$\Psi_2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) y^n. \quad (4.48)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (4.45), celle-ci devient

$$\begin{aligned} y \sum_{n=1}^{\infty} M_n(x) n y^{n-1} &= x \sum_{n=0}^{\infty} M_n(x) y^n - \Delta \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) y^n \\ \Leftrightarrow n M_n(x) &= x M_n(x) - \Delta K_n(x). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\Psi_1(y) = \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{x-n} y^n. \quad (4.49)$$

L'équation (4.46) nous donne

$$\begin{aligned} (y - 2g) \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x) n y^{n-1} &= (x - 4g^2 + 2gy) \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) y^n - \Delta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{x-n} y^n \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n K_n(x) - 2g(n+1) K_{n+1}(x)) y^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( x - 4g - \frac{\Delta^2}{x-n} \right) K_n + 2g K_{n-1} \right] y^n. \end{aligned}$$

Pour une puissance de  $y$  fixée,  $p = n + 1$ ,

$$(p-1)K_{p-1}(x) - 2g p K_p(x) = \left(x - 4g - \frac{\Delta^2}{x-p+1}\right)K_{p-1} + 2gK_{p-2}.$$

Cela nous offre une relation de récurrence pour la détermination des coefficients  $K_n(x)$

$$nK_n(x) = f_{n-1}(x)K_{n-1}(x) - K_{n-2}(x), \quad (4.50)$$

avec

$$f_n(x) = \frac{1}{2g} \left(n - x + \frac{\Delta^2}{x-n}\right) + 2g, \quad (4.51)$$

et  $K_n = 0 \forall n < 0$ . On peut poser sans restriction la condition initiale  $K_0(x) = 1$  car tous les coefficients lui sont directement proportionnels. Nous sommes donc en présence de deux expressions pour les solutions de l'équation (4.37)

$$\psi(z) = \chi_1(z) = e^{-gz} \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x)}{x-n} (z+g)^n, \quad (4.52)$$

$$\psi(z) = \chi_2(-z) = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)(g-z)^n, \quad (4.53)$$

qui, par construction, doivent être équivalentes. Introduisons la fonction

$$G_+(x, z) = \chi_2(-z) - \chi_1(z). \quad (4.54)$$

Elle doit être nulle pour toute valeur de  $z$  si  $x = \mathcal{E} + g^2$  et tel que  $E = \hbar\omega_L \mathcal{E}$  est une valeur propre de  $H_+$ . Si  $x_0$  vérifie  $G_+(x, z) = 0$  pour un  $z$  quelconque, il vérifie cette expression pour tout  $z$  car les énergies propres ne peuvent pas dépendre de la projection de cet état sur un état cohérent. On peut alors poser la fonction

$$\begin{aligned} G_+(x) &= G_+(x, 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) g^n \left(1 - \frac{\Delta}{x-n}\right), \end{aligned} \quad (4.55)$$

dont les zéros donnent les valeurs propres de  $H_+$ . Les états propres de  $H_+$  possèdent deux expressions équivalentes

$$\phi_m(z) = e^{-gz} \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(x_m)}{x_m - n} (z+g)^n \quad (4.56)$$

$$\phi_m(z) = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x_m)(g-z)^n, \quad (4.57)$$

et les énergies propres correspondantes sont données par

$$E_m = \hbar\omega_L(x_m - g^2), \quad (4.58)$$

avec  $x_m$  solution de l'équation  $G_+(x) = 0$  et  $g = g/\omega_L$ ,  $\Delta = \omega_0/2\omega_L$  et  $\mathcal{E} = E/\hbar\omega_0$ . Rappelons que les relations (4.59) et (4.60) permettent d'obtenir les composantes des états propres dans la base des états non-couplés, à partir des fonctions de Bargmann

$$\langle e, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_s(z) \Big|_{z=0}, \quad (4.59)$$

$$\langle g, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_a(z) \Big|_{z=0}. \quad (4.60)$$

Pour certaines valeurs de paramètres  $\Delta$  et  $g$ , il existe des valeurs propres supplémentaires, appelées exceptionnelles, qui ne sont pas données par les zéros de la fonction  $G_+(x)$ . Elles sont de la forme  $E_n = \hbar\omega_L(n - g^2)$  et apparaissent lorsque  $K_n(n) = 0$ . Cette condition traduit la suppression du pôle en  $x = n$  car le numérateur,  $K_n$ , correspondant à ce pôle s'annule (mais  $G_+(x) \neq 0$ ). Dans le chapitre suivant, nous comparons les valeurs propres obtenues numériquement avec les valeurs propres obtenues sur base de la résolution ci-dessus. Les paramètres que nous avons choisi par la suite ne font jamais apparaître de valeurs propres exceptionnelles.

#### 4.2.4 Résolution de l'équation de Schrödinger dans $\mathcal{H}_-$

Les états propres du systèmes dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$  sont solutions de l'équation de Schrödinger

$$\hbar\omega_L z \frac{d}{dz} \psi(z) + \hbar g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi(z) - \frac{\hbar\omega_0}{2} \psi(-z) = E\psi(z). \quad (4.61)$$

L'équation adimensionnalisée

$$z \frac{d}{dz} \psi(z) + g \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi(z) - \Delta \psi(-z) = \mathcal{E} \psi(z), \quad (4.62)$$

donne une expression tout à fait similaire à l'équation (4.38) au signe devant  $\Delta$  près. Suivant le même raisonnement que dans  $\mathcal{H}_+$ , les états propres de  $H_-$  sont donnés par

$$\phi_m(z) = e^{-gz} \Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-K_n(x_m)}{x_m - n} (z + g)^n, \quad (4.63)$$

$$\phi_m(z) = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x_m) (g - z)^n, \quad (4.64)$$

et ses valeurs propres par

$$E_m = \hbar\omega_L(x_m - g^2), \quad (4.65)$$

où  $x_m$  est solution de l'équation  $G_-(x) = 0$  avec

$$G_-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) g^n \left( 1 + \frac{\Delta}{x - n} \right), \quad (4.66)$$

et les conditions de récurrence

$$nK_n(x) = f_{n-1}(x)K_{n-1}(x) - K_{n-2}(x), \quad (4.67)$$

$$f_n = \frac{1}{2g} \left( n - x - \frac{\Delta^2}{x - n} \right) + 2g, \quad (4.68)$$

où les variables adimensionnelles sont  $g = g/\omega_L$ ,  $\Delta = \omega_0/2\omega_L$  et  $\mathcal{E} = E/\hbar\omega_0$ . De la même façon que dans  $\mathcal{H}_+$ , les composantes des états propres dans la base des états non-couplés sont obtenues à l'aide des relations (4.69) et (4.70)

$$\langle e, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_a(z) \Big|_{z=0}, \quad (4.69)$$

$$\langle g, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_s(z) \Big|_{z=0}. \quad (4.70)$$

## Chapitre 5

# Étude numérique du modèle de Rabi

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats obtenus à partir d'un traitement numérique du modèle de Rabi. Tout d'abord, nous présentons comment, en tronquant l'espace d'Hilbert, il est possible d'obtenir numériquement une approximation aux valeurs et vecteurs propres de l'hamiltonien de Rabi et nous vérifions la convergence de notre méthode. Ensuite, nous comparons ces résultats avec ceux obtenus par traitement des solutions analytiques présentées au chapitre 4 et nous expliquons pourquoi nous continuons à travailler avec notre modèle numérique. Ensuite, nous nous intéressons à la répulsion des niveaux d'énergie de l'hamiltonien de Rabi, extrêmement différente de celle des niveaux de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, dû aux termes de couplages supplémentaires, non-résonnants. Pour clôturer, nous analysons en détails les modifications des oscillations de Rabi amenées par les transitions non-résonnantes. Nous exposons également une influence nouvelle de l'état initial sur la dynamique de ces oscillations.

### 5.1 Approche numérique : troncation de l'espace d'Hilbert

Avant la première résolution analytique du modèle de Rabi par Braak, celui-ci ne pouvait être traité que de manière numérique. Pour traiter numériquement un système, son espace d'Hilbert doit être de dimension finie. Comme l'espace d'Hilbert associé au modèle de Rabi est de dimension infinie, il faut le tronquer, c'est-à-dire considérer un nombre maximum de photons dans le système, limitant ainsi sa dimension. Si nous choisissons le nombre maximum de photons comme étant  $N_{\max}$ , l'espace d'Hilbert est de dimension  $2N_{\max} + 2$ . Il est alors possible de construire l'hamiltonien de Rabi donné par l'expression (1.18) dans la base finie des états non-couplés

$$|g, 0\rangle, |e, 0\rangle, |g, 1\rangle, |e, 1\rangle, \dots, |g, N_{\max}\rangle, |e, N_{\max}\rangle,$$

où il prend la forme

$$H_{\text{Rabi}} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 & \hbar g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hbar g & \hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hbar g & 0 & 0 & \hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{2}\hbar g & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar g & 2\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{\max}\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Cette matrice de taille finie peut être diagonalisée numériquement. Nous obtenons ainsi des ensembles de  $2N_{\max} + 2$  valeurs propres  $E_j(N_{\max})$  ( $j = 1, \dots, 2N_{\max} + 2$ ) et vecteurs propres  $|\phi_j(N_{\max})\rangle$  qui

constituent une approximation aux véritables énergies  $E_j$  et états propres  $|\phi_j\rangle$  du système. Les états propres sont exprimés dans la base des états non-couplés<sup>1</sup> et sont numérotés par énergie croissante. Cette méthode permet d'obtenir uniquement le "bas" du spectre infini de l'hamiltonien de Rabi, contrairement à la solution analytique.

### 5.1.1 Convergence des valeurs et vecteurs propres

Afin de s'assurer d'une bonne précision sur les états propres, il est intéressant de regarder la convergence des différentes valeurs propres en fonction de la dimension de l'espace d'Hilbert tronqué. La figure 5.1 illustre la convergence de différentes valeurs propres, numérotées par ordre croissant, en fonction du nombre de photons maximum  $N$  du système pour un régime de couplage fort  $g/\omega_0 = 0.4$ . Les premières valeurs propres convergent très rapidement, ne nécessitant qu'une vingtaine de photons dans l'espace tronqué. Le graphique semi-logarithmique indique une convergence de type exponentielle. Les courbes ont une forme parabolique, entraînant une convergence de la forme

$$E_j(N_{\max}) = E_j(\infty) + e^{-a_j N_{\max}^2 + b_j}, \quad (5.2)$$

avec  $a_j > 0$  et  $j \ll 2N_{\max} + 2$ . Les points formant un "nuage" plus ou moins horizontal sur la droite du graphique sont uniquement représentatifs d'erreurs numériques et nous pouvons dire que la convergence est atteinte à partir du début de ce "plat". Dans le cas de la 20e valeur propre, la valeur obtenue pour  $N_{\max} = 9^2$  est fortement éloignée de la valeur correcte. Sa convergence en fonction du nombre de photons commence de façon exponentielle avant de suivre l'allure donnée par l'équation (5.2). De plus, la taille de l'espace requis pour arriver à converger numériquement grandit avec l'énergie. Ceci est dû au fait que les termes non-diagonaux ont une longue portée et que l'espace d'Hilbert est tronqué : c'est un "effet de bord". L'importance des termes non-diagonaux est proportionnelle au

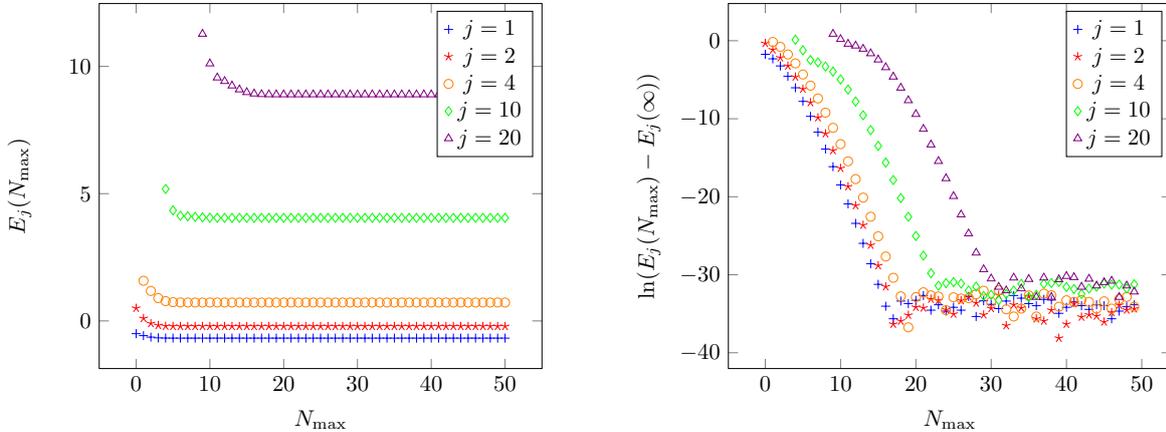


FIGURE 5.1 – Convergence de différentes énergies propres de l'hamiltonien de Rabi en fonction du nombre de photons maximum de l'espace d'Hilbert tronqué pour un désaccord  $\delta = 0$  et un couplage  $g/\omega_0 = 0.4$ . Les énergies propres sont numérotées par ordre croissant.

couplage  $g$ . On s'attend donc à ce que les "effets de bords" soient plus importants lorsque l'on augmente  $g/\omega_0$ , ce qui est le cas. Ce comportement est illustré sur la figure 5.2 pour un couplage  $g/\omega_0 = 1$ . Plus le couplage est élevé, plus la dimension de l'espace d'Hilbert requise pour garder la même précision sur

1. Les relations (3.7) et (3.8) donnent une expression des états propres de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings à partir des états non-couplés également.

2. C'est la taille minimale que l'espace d'Hilbert doit avoir pour pouvoir calculer cette valeur car un espace à  $N_{\max}$  photons donne lieu à  $2(N_{\max} + 1)$  valeurs propres.

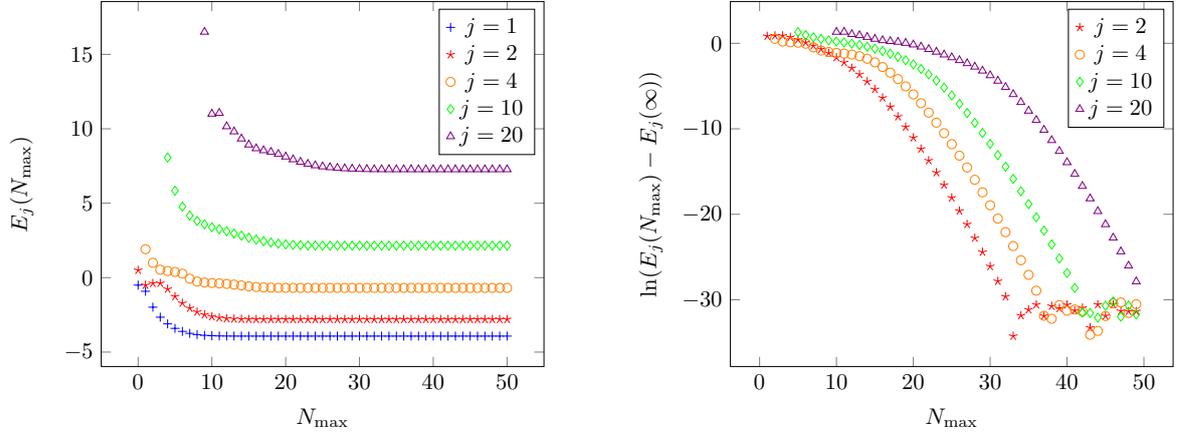


FIGURE 5.2 – Convergence de différentes énergies propres de l'hamiltonien de Rabi en fonction du nombre de photons maximum de l'espace d'Hilbert tronqué pour un désaccord  $\delta = 0$  et un couplage  $g/\omega_0 = 1$ . Les énergies propres sont numérotées par ordre croissant.

l'énergie doit être grande. De plus, l'évolution des énergies commence de la même façon que pour le couplage  $g/\omega_0 = 0.4$ , pour ensuite former une droite dans le graphique semi-logarithmique, traduisant une convergence du type

$$E_j(N_{\max}) = E_j(\infty) + e^{-c_j N_{\max}}, \quad (5.3)$$

où  $c_j > 0$ , plus lente que précédemment.

Il faut également vérifier que les différentes composantes des vecteurs propres convergent convenablement. La figure 5.3 montre la convergence de certaines composantes des états propres  $|\phi_{10}\rangle$  et  $|\phi_{20}\rangle$  projetés dans la base des états non-couplés. Ces états propres ont été choisis à des énergies propres

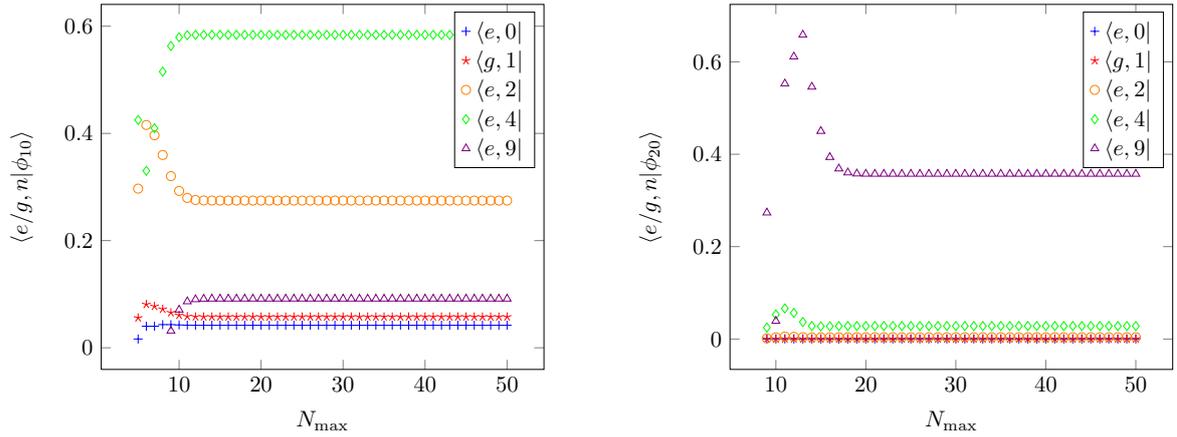


FIGURE 5.3 – Convergence des composantes dans la base non-couplée des vecteurs propres relatifs à la 10<sup>e</sup> (à gauche) et à la 20<sup>e</sup> valeur propre (à droite) de l'hamiltonien de Rabi en fonction du nombre de photons maximum de l'espace d'Hilbert tronqué pour un désaccord  $\delta = 0$  et un couplage  $g/\omega_0 = 0.4$ .

assez éloignées afin de s'assurer une convergence pour un grand nombre d'états. Les vecteurs propres ont une évolution plus compliquée que les valeurs propres en fonction de la taille de l'espace d'Hilbert mais nécessitent le même nombre de photons pour converger.

### 5.1.2 Confrontation avec les solutions analytiques

Avant de poursuivre l'étude du système dans l'espace tronqué, nous allons vérifier la concordance des états propres trouvés de façon numérique avec ceux provenant de la résolution analytique exposée au chapitre précédent. Comme les solutions analytiques sont recherchées dans les sous-espaces de parités  $\mathcal{H}_+$  et  $\mathcal{H}_-$  séparément, la confrontation des résultats se fera plus aisément si nous séparons l'espace d'Hilbert tronqué. A l'aide de la matrice (5.1), nous pouvons construire les hamiltoniens  $H_+$  et  $H_-$  en ne gardant que les états non-couplés de même parité<sup>3</sup>. Si  $N_{\max}$  est pair,  $\mathcal{H}_+$  est engendré par  $\{|e, 0\rangle, |g, 1\rangle, |e, 2\rangle, |g, 3\rangle, |e, 4\rangle, |g, 5\rangle, |e, 6\rangle, |g, 7\rangle, \dots, |e, N_{\max}\rangle\}$ , l'hamiltonien dans cette base s'écrit

$$H_+ = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar g & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hbar g & \hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{2}\hbar g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar g & 2\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{3}\hbar g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\hbar g & 3\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{4}\hbar g & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4}\hbar g & 4\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{\max}\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

et  $\mathcal{H}_-$  est engendré par  $\{|g, 0\rangle, |e, 1\rangle, |g, 2\rangle, |e, 3\rangle, |g, 4\rangle, |e, 5\rangle, |g, 6\rangle, |e, 7\rangle, \dots, |g, N_{\max}\rangle\}$ , avec l'hamiltonien

$$H_- = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar g & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hbar g & \hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{2}\hbar g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar g & 2\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{3}\hbar g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\hbar g & 3\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} & \sqrt{4}\hbar g & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4}\hbar g & 4\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{\max}\hbar\omega_L - \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Les termes soulignés sont les termes de couplage non-résonnants. Nous avons à diagonaliser numériquement deux matrices de dimension deux fois plus petite que celle choisie pour l'espace d'Hilbert entier et l'union des valeurs propres des deux hamiltoniens donne l'ensemble des valeurs propres de  $H_{\text{Rabi}}$ , car nous pouvons écrire, en changeant l'ordre des états propres non-couplés,

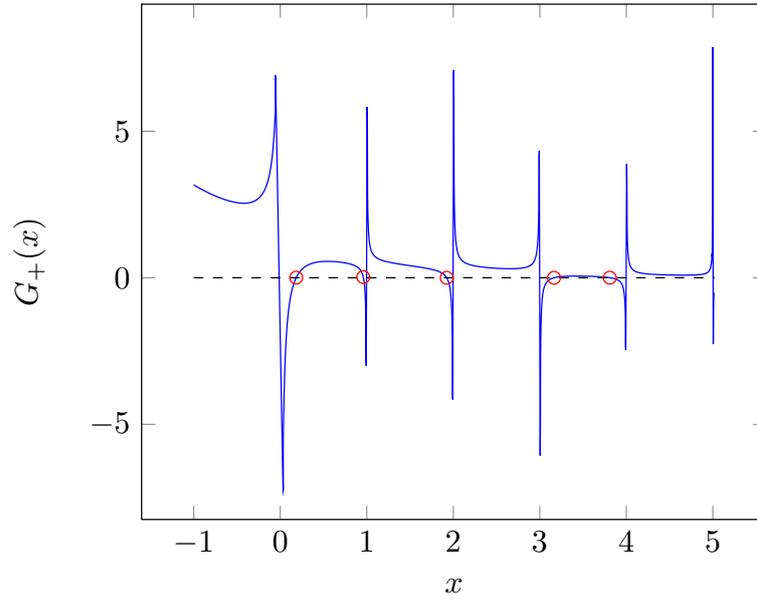
$$H_{\text{Rabi}} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Pour obtenir les valeurs propres de  $H_+$  issues de la résolution analytique dans  $\mathcal{H}_+$ , nous évaluons numériquement les zéros de la fonction

$$G_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) g^n \left(1 - \frac{\Delta}{x-n}\right), \quad (5.7)$$

avec  $g = g/\omega_L$ ,  $\Delta = \omega_0/2\omega_L$  et les coefficients  $K_n(x)$  donnés par les relations de récurrence (4.50) et (4.51). Cette fonction est illustrée sur la figure 5.4. Soient  $x_m$  ses zéros, les valeurs propres sont données par  $E_m = \hbar\omega_L x_m - \hbar g^2/\omega_L$ . Après comparaison, les valeurs propres obtenues "analytiquement"

3. Il est intéressant de remarquer que les éléments de la matrice (5.1) qui font intervenir deux états de parité différente sont nuls.

FIGURE 5.4 – Graphique de  $G_+(x)$  pour un couplage  $g/\omega_0 = 0.4$ .

et celles obtenues numériquement dans l'espace tronqué concordent à au moins  $10^{-10}$  près, pour les 15 premières valeurs propres, voir les exemples dans la table 5.1. Les énergies propres plus élevées

$g/\omega_0$	Numéro valeur dans $\mathcal{H}_+$	$E_m = \hbar\omega_L x_m - \hbar g^2/\omega_L$	Valeur numérique
0.1	1	0.39510229805427	0.3951022980542707
0.1	5	4.272721227384955	4.272721227384948
0.1	12	10.821337761525285	10.821337761522251
0.4	1	0.023367481367233794	0.023367481367233878
0.4	5	3.650898441995186	3.650898441995183
0.4	12	10.830508925395536	10.830508935042735
0.7	1	-0.43898823843925266	-0.43898823843925283
0.7	5	3.5896666519241696	3.589666651924172
0.7	12	10.61202535513704	10.612173215785923

TABLE 5.1 – Exemples de valeurs propres obtenues sur base de la solution analytique à partir des zéros de la fonction  $G_+(x)$  donnée par l'équation (5.7) et numériquement par diagonalisation de l'hamiltonien tronqué avec  $N_{\max} = 20$  dans  $\mathcal{H}_+$ . Elles sont numérotées dans l'ordre croissant et sont exprimées en unités de  $\hbar\omega_0$ .

n'ont pas été calculées car la fonction  $G_+(x)$  est une fonction récursive et est donc lourde à traiter numériquement. Les valeurs propres de  $H_-$  issues de la solution analytique dans  $\mathcal{H}_-$  sont obtenues de manière similaire en résolvant l'équation  $G_-(x) = 0$ ,  $G_-(x)$  étant donnée par la relation (4.66). Leur concordance avec les valeurs propres numériques est la même dans les deux sous-espaces.

Pour la comparaison des vecteurs propres, nous allons utiliser les relations (4.59) et (4.60) qui permettent de passer de la fonction de Bargmann aux composantes de l'état sur les états non-couplés. Pour obtenir les vecteurs propres "analytiques" de  $H_+ \in \mathcal{H}_+$ , nous calculons les fonctions de Bargmann à l'aide de la relation (4.56) ou (4.57) indifféremment. La récursion est faite numériquement avec les valeurs propres "analytiques", toujours de  $H_+$ , trouvées précédemment. Un vecteur est formé avec les

composantes de la fonction de Bargmann sur la base non-couplée de  $\mathcal{H}_+$  grâce aux relations (4.59) et (4.60)

$$\langle e, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_s(z) \Big|_{z=0}, \quad \langle g, n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{dz^n} \psi_a(z) \Big|_{z=0}.$$

La diagonalisation numérique fournit également les états propres en termes de composante dans la base des états non-couplés. Avant de comparer ces deux ensembles de vecteurs, il est nécessaire de les normer car il existe une infinité de façons d'écrire un vecteur propre, ce qui pourrait entraîner une conclusion erronée à la comparaison. De plus, un état se doit d'être normé pour être un état physique ; de ce fait, les états utilisés tout au long de ce chapitre sont préalablement normés. Les vecteurs résultant des fonctions analytiques et ceux obtenus dans l'espace tronqué concordent à une précision d'au moins  $10^{-6}$  à un facteur de phase global près qui ne sait pas être éliminé par la normalisation mais qui ne change en rien les résultats physiques. La comparaison dans  $\mathcal{H}_-$  se fait de façon équivalente mais à l'aide des relations (4.69) et (4.70) pour obtenir les fonctions de Bargmann dans la base des états non-couplés de  $H_-$ . Les comparaisons offrent des conclusions identiques dans les deux sous-espaces.

Comme nous avons montré que les deux méthodes d'obtention des états propres de l'hamiltonien de Rabi donnent des résultats similaires, nous pouvons utiliser l'une ou l'autre comme bon nous semble. Les résultats présentés ci-après sont calculés à l'aide de l'espace d'Hilbert tronqué. Nous avons choisi cette voie car, d'une part, le processus récursif de la résolution analytique alourdit les calculs des valeurs propres et, d'autre part, nous nous intéressons aux composantes des états propres dans la base des états non-couplés, qui ne sont pas fournis directement avec la résolution analytique. Néanmoins, celle-ci reste intéressante pour l'étude des états cohérents, la représentation de Bargmann étant une projection directe sur ces états ou lorsque l'on considère un nombre très élevé de photons, pour obtenir des états propres d'énergies élevées ou pour travailler dans un régime de couplage ultrafort  $g/\omega_0 \gg 1$ , pour lequel la convergence des résultats est très lente en espace tronqué.

## 5.2 Répulsion de niveaux

### 5.2.1 Spectres obtenus numériquement

Nous allons nous intéresser à la répulsion des niveaux de l'hamiltonien de Rabi qui est extrêmement différente de celle des niveaux de Jaynes-Cummings. De la même façon que dans la section 3.2, nous regarderons uniquement les amplitudes de répulsion. Nous ne nous intéresserons pas aux transitions Landau-Zener dans l'hamiltonien de Rabi bien qu'elles soient traitées dans la littérature [31, 32]. Afin de comparer les deux, rappelons que dans le cas de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings  $\hat{H}_{JC}$ , les niveaux sont couplés deux par deux et sont soumis chacun à une répulsion en  $\delta = 0$  (à la résonance). La figure 5.5 illustre les valeurs propres de  $\hat{H}_{JC}$  dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$ . Les valeurs propres de l'hamiltonien de Rabi  $\hat{H}_{\text{Rabi}}$  dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$  en fonction de  $\delta$  sont illustrées sur la figure 5.6. Il est également possible d'obtenir des répulsions entre les niveaux en faisant varier le couplage  $g$  avec un désaccord en fréquence fixé, comme le présente la figure 5.8 dans les cas des hamiltoniens de Jaynes-Cummings et de Rabi. Comparons et interprétons les spectres obtenus pour la répulsion de niveaux en fonction du désaccord en fréquence  $\delta$ . L'hamiltonien de Rabi sépare les états en deux sous-espaces de parités opposées  $\mathcal{H}_+$  et  $\mathcal{H}_-$ . Deux niveaux de parités différentes ne sont jamais couplés et ils ne se repoussent donc pas. Par conséquent, les courbes des niveaux des deux sous-espaces se croisent, rendant difficile la lecture des figures. Pour gagner en clarté, nous avons choisi de ne représenter que les niveaux de  $H_-$ . Nous allons aborder deux points de vue pour discuter les répulsions des niveaux. Le premier se fait à l'aide des états non-couplés et est plus intuitif tandis que le second à partir des états propres de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings et permet une description quantitative des répulsions.

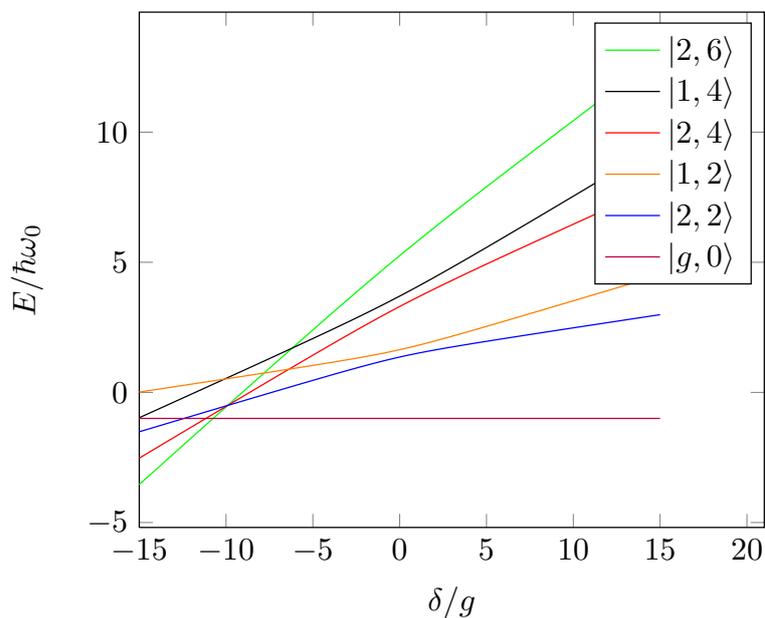


FIGURE 5.5 – Répulsion des valeurs propres de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$ .

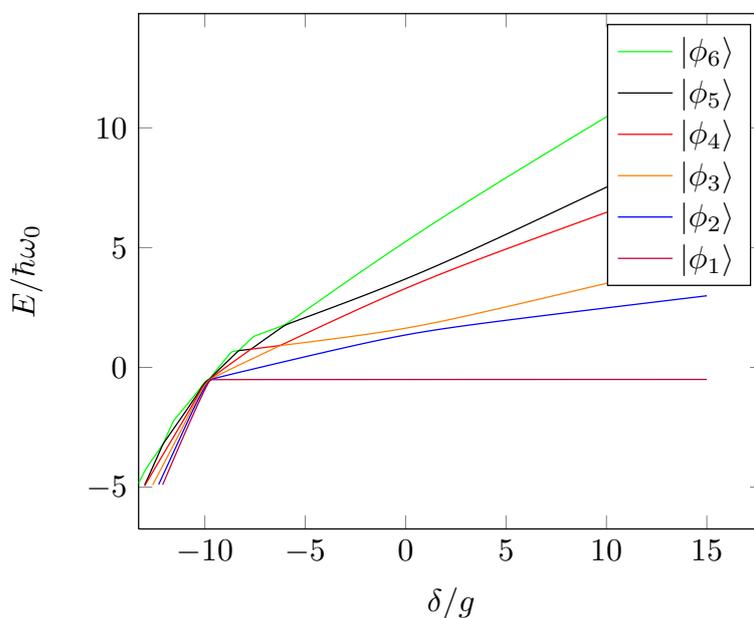


FIGURE 5.6 – Répulsion des valeurs propres de l'hamiltonien de Rabi dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$ . Les niveaux sont dénommés par leur état propre correspondant et ils sont numérotés par ordre croissant d'énergie dans le sous-espace. Figure obtenue pour un couplage  $g/\omega_0 = 0.1$  et une fréquence  $\omega_0$  fixée. Le désaccord en fréquence  $\delta$  varie de par la variation de  $\omega_L$ .

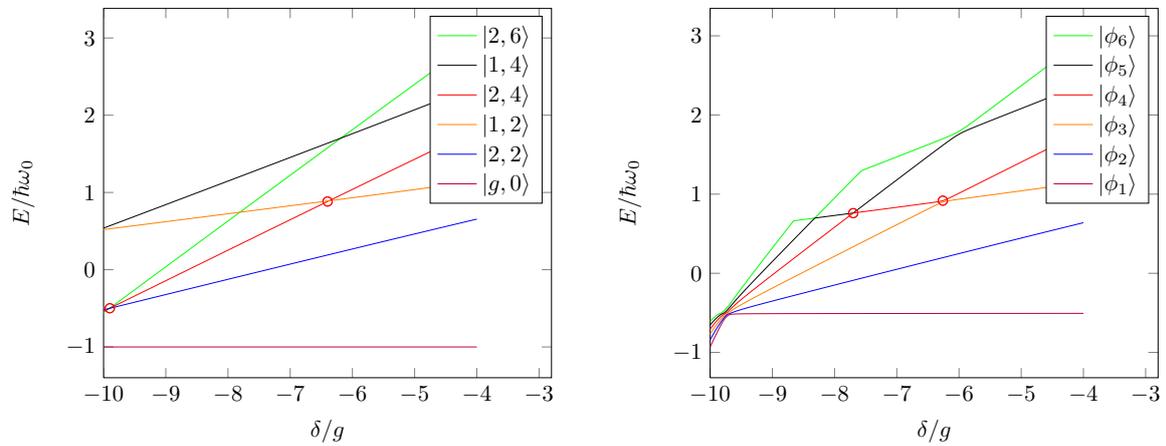


FIGURE 5.7 – Répulsion des valeurs propres de l’hamiltonien de Jaynes-Cummings (à gauche) et de Rabi (à droite) dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$ . Les valeurs propres sont numérotées par ordre croissant dans le sous-espace. Figures obtenues pour un couplage  $g/\omega_0 = 0.1$ .

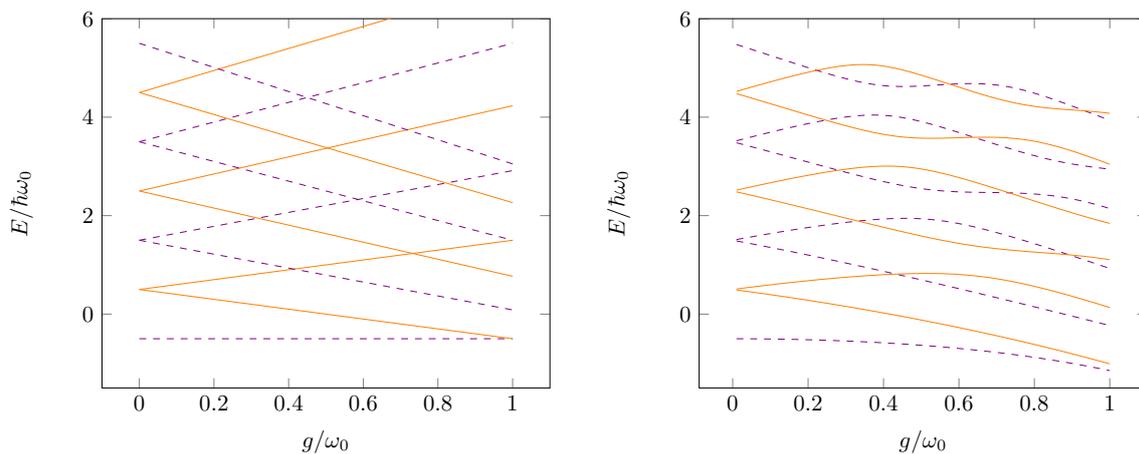


FIGURE 5.8 – Répulsion des valeurs propres de l’hamiltonien de Jaynes-Cummings (à gauche) et de Rabi (à droite) en fonction du couplage pour un désaccord en fréquence nul. Les valeurs propres de  $\mathcal{H}_-$  sont en traits pointillés mauves et celles de  $\mathcal{H}_+$  sont en traits pleins oranges.

Tout d'abord, si nous partons des niveaux non-couplés  $|g, n\rangle$  et  $|e, n\rangle$ , nous savons que chaque niveau est couplé avec deux autres, un par couplage résonnant

$$\hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a} |g, n\rangle = \hbar g \sqrt{n} |e, n-1\rangle \quad \text{ou} \quad \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger |e, n\rangle = \hbar g \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle, \quad (5.8)$$

et l'autre par couplage non-résonnant

$$\hbar g \hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger |g, n\rangle = \hbar g \sqrt{n+1} |e, n+1\rangle \quad \text{ou} \quad \hbar g \hat{\sigma}^- \hat{a} |e, n\rangle = \hbar g \sqrt{n} |g, n-1\rangle. \quad (5.9)$$

Pour les couplages résonnants, la répulsion est déjà présente pour l'hamiltonien de Jaynes-Cummings. Les couplages non-résonnants quant à eux induisent une répulsion des niveaux de la figure 5.6 à certains croisements présents dans la figure 5.5. La figure 5.7 illustre de plus près ces répulsions. La répulsion étant faible, nous pourrions plutôt parler de "rebondissement" des niveaux couplés les uns sur les autres. Un état propre de l'hamiltonien de Rabi se retrouve "coincé" entre un niveau d'énergie plus élevée, et un d'énergie moins élevée, sans pouvoir les croiser. Comme c'est le cas pour tous les niveaux du sous-espace, il en résulte une hiérarchie dans les énergies des états propres du demi-espace qu'aucun paramètre du système ne peut changer. Cela explique la disparition de tous les croisements présents dans la figure 5.5. De plus, le niveau fondamental, qui est isolé sous l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, voit ici son énergie varier pour des  $\delta$  négatifs. Dans le spectre de  $\hat{H}_{\text{JC}}$ , tous les niveaux se croisent dans un domaine restreint de valeurs de  $\delta$  négatives car toutes les énergies décroissent linéairement pour  $\delta < 0$ . La hiérarchie des niveaux de l'hamiltonien de Rabi empêche ce croisement. Cependant, les niveaux conservent leur décroissance, entraînant un plongeon de tous les niveaux vers les énergies de plus en plus négatives. L'énergie de l'état fondamental qui était jusque-là constante se voit contrainte de diminuer également, ne pouvant pas croiser les autres. Quand le couplage augmente, le désaccord en fréquence pour lequel a lieu la transition est de moins en moins négatif, comme le montre la figure 5.9. Cela est dû au fait que les niveaux de Jaynes-Cummings dépendent du couplage et se croisent plus tôt lorsque celui-ci augmente.

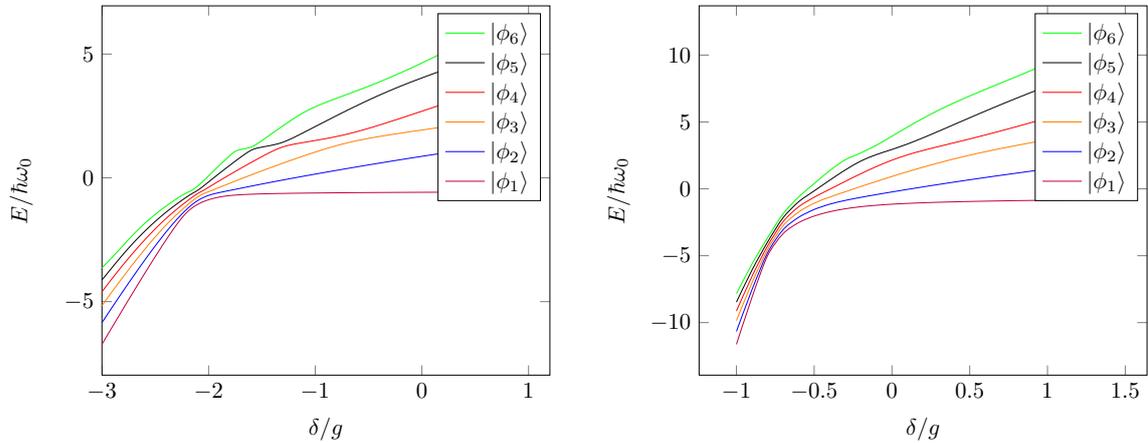


FIGURE 5.9 – Répulsion des valeurs propres de l'hamiltonien de Rabi dans le sous-espace  $\mathcal{H}_-$ . Les valeurs propres sont numérotées par ordre croissant dans le sous-espace. Figures obtenues pour des couplages  $g/\omega_0 = 0.4$  (à gauche) et  $g/\omega_0 = 1$  (à droite).

### 5.2.2 Théorie des perturbations

Une autre façon de voir les choses est de considérer que l'hamiltonien de Rabi peut s'écrire sous la forme

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (5.10)$$

avec

$$\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega_L \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^+ \hat{a}), \quad (5.11)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g (\hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^- \hat{a}). \quad (5.12)$$

En utilisant la théorie des perturbations, nous pouvons obtenir un ordre de grandeur des répulsions dues aux interactions non-résonnantes. En utilisant les relations entre les états propres de Jaynes-Cummings et les états non-couplés, (3.7) et (3.8), nous déduisons l'action de  $\hat{H}_{\text{int}}$  sur les états propres de  $\hat{H}_{\text{JC}}$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} |1, N\rangle &= \hat{H}_{\text{int}} (\cos \theta_N |e, N-1\rangle + \sin \theta_N |g, N\rangle) \\ &= \cos \theta_N \sqrt{N-1} |g, N-2\rangle + \sin \theta_N \sqrt{N+1} |e, N+1\rangle, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} |2, N\rangle &= -\sin \theta_N |e, N-1\rangle + \cos \theta_N |g, N\rangle \\ &= -\sin \theta_N \sqrt{N-1} |g, N-2\rangle + \cos \theta_N \sqrt{N+2} |e, N+2\rangle, \end{aligned} \quad (5.14)$$

avec  $\cot 2\theta_N = -\delta/\Omega_N$  et  $\Omega_N = 2g\sqrt{N}$ . On trouve l'état non-couplé  $|g, N-2\rangle$  dans les états  $|1, N-2\rangle$  et  $|2, N-2\rangle$  et  $|e, N+1\rangle$  apparaît dans  $|1, N+2\rangle$  et  $|2, N+2\rangle$ . Les termes non-résonnants couplent un état propre de  $\hat{H}_{\text{JC}}$  avec 4 autres, tels qu'illustrés sur la figure 5.10.

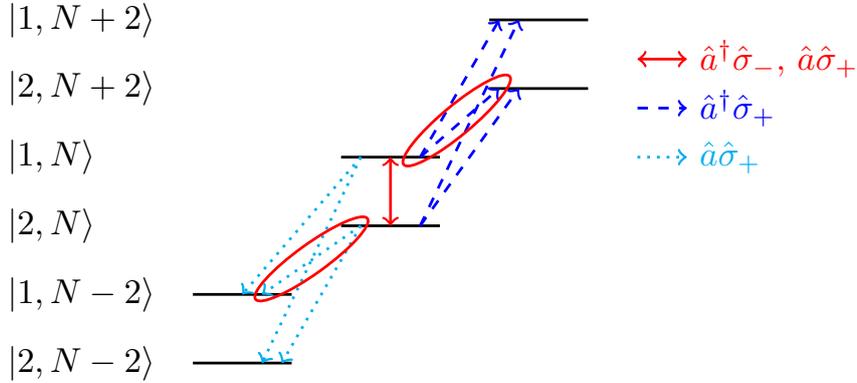


FIGURE 5.10 – Couplages des niveaux de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings par les termes non-résonnants.

Afin d'avoir un ordre de grandeur de la répulsion des niveaux due aux termes non-résonnants, il faut s'intéresser à la théorie des perturbations pour des niveaux dégénérés. Les corrections en énergie à l'ordre 1 sont données par les valeurs propres de la matrice d'interaction (A.12) et ses vecteurs propres sont les états propres corrigés à l'ordre 0. Pour comprendre quels vecteurs utiliser pour construire la matrice, prenons un exemple avec l'état  $|2, 4\rangle$ , en rouge sur les graphiques. L'hamiltonien d'interaction le couple aux états  $|1, 2\rangle$ ,  $|2, 2\rangle$ ,  $|1, 6\rangle$  et  $|2, 6\rangle$  et les croisements qu'il faisait avec ces états disparaissent. Parmi les états de plus basse énergie,  $|2, 4\rangle$  ne peut "rebondir" que sur l'état dont l'énergie lui est la plus proche,  $|1, 2\rangle$ . L'état  $|2, 1\rangle$  quant à lui aura toujours une énergie plus faible que  $|1, 2\rangle$ , dû à leur répulsion. De même, il ne faut pas calculer les amplitudes de répulsion avec les niveaux  $|1, 6\rangle$  et  $|2, 6\rangle$  car ceux-ci sont repoussés par l'état  $|1, 4\rangle$ , que  $|2, 4\rangle$  ne pourra jamais croiser. Il ne reste alors

qu'une seule amplitude de répulsion à calculer, entre  $|2, 4\rangle$  et  $|1, 2\rangle$ . En toute généralité, chaque niveau est bien "coincé" entre deux niveaux. Pour  $|1, N\rangle$ , le niveau adjacent inférieur est  $|2, N\rangle$  (répulsion résonnante) et le niveau adjacent supérieur est  $|2, N+2\rangle$  (répulsion non-résonnante) et dans le cas de  $|2, N\rangle$ , le niveau inférieur est  $|1, N-2\rangle$  (répulsion non-résonnante) et le niveau supérieur est  $|1, N\rangle$  (répulsion résonnante). Les binômes de niveaux créant les répulsions supplémentaires par rapport à l'hamiltonien de Jaynes-Cummings sont  $|1, N\rangle$  et  $|2, N+2\rangle$  et sont entourés sur la figure 5.10. La matrice d'interaction pour ces deux niveaux est, pour une valeur de  $\delta$  telle que  $E_{|1,N\rangle} = E_{|2,N+2\rangle}$ <sup>4</sup>,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2} \\ -\hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Ses valeurs propres sont  $\hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2}$  et  $-\hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2}$  associées respectivement aux vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne les états corrigés

$$|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, N\rangle + |2, N+2\rangle, \quad (5.16)$$

$$|2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, N\rangle - |2, N+2\rangle, \quad (5.17)$$

d'énergies respectives

$$E_{1'} = (N-1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar}{2}(\delta + \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2}) - \hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2}, \quad (5.18)$$

$$E_{2'} = (N-1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar}{2}(\delta + \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2}) + \hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2}. \quad (5.19)$$

L'amplitude de la répulsion entre ces niveaux est  $2\hbar g\sqrt{N+1}\sin^2\theta_N\sin^2\theta_{N+2}$  avec  $\delta$  satisfaisant

$$(N-1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2} - (N+1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + \Omega_{N+2}^2} = 0. \quad (5.20)$$

La table 5.2 donne des ordres de grandeur de l'amplitude de répulsion, en unités  $E/\omega_0$  pour quelques niveaux, comparant les résultats obtenus par la théorie des perturbations et ceux calculés numériquement. Pour rappel, l'amplitude de la répulsion résonnante est donnée par  $\hbar\Omega_N$ . Malgré quelques

$g/\omega_0$	États	Type	$\delta/\omega_0$	$\delta/g$	Th. perturbations	Val. Numériques
0.1	$ 1, 2\rangle \leftrightarrow  2, 2\rangle$	Réson.	0	0	0.282843	0.282119
0.1	$ 1, 2\rangle \leftrightarrow  2, 4\rangle$	Non-rés.	-0.637	-6.37	0.0099279	0.0402284
0.1	$ 1, 4\rangle \leftrightarrow  2, 4\rangle$	Réson.	0	0	0.4	0.397926
0.1	$ 1, 4\rangle \leftrightarrow  2, 6\rangle$	Non-rés.	-0.618	-6.18	0.0104336	0.0638882
0.4	$ 1, 2\rangle \leftrightarrow  2, 2\rangle$	Réson.	0	0	1.13137	1.06249
0.4	$ 1, 2\rangle \leftrightarrow  2, 4\rangle$	Non-rés.	-0.300	-0.750	0.269718	0.358418
0.4	$ 1, 4\rangle \leftrightarrow  2, 4\rangle$	Réson.	0	0	1.6	1.34498
0.4	$ 1, 4\rangle \leftrightarrow  2, 6\rangle$	Non-rés.	-0.108	-0.271	0.318137	0.530554

TABLE 5.2 – Exemples d'amplitudes de répulsion pour les états  $|1, 2\rangle$  et  $|1, 4\rangle$  pour différents couplages.

légères différences, les ordres de grandeur des amplitudes calculées par la théorie des perturbations

4. La matrice d'interaction ne donne les corrections en énergie qu'aux points où les niveaux sont dégénérés.

concordent avec les véritables répulsions calculées numériquement. La répulsion des niveaux dépendant principalement du couplage, il est intéressant de la regarder pour des couplages différents. La figure 5.9 illustre la répulsion des niveaux pour des couplages plus importants que celui des figures précédentes. Plus le couplage est important, plus les répulsions sont importantes.

### 5.3 Dynamique générée par l'hamiltonien de Rabi

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique du système, régie par l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien de Rabi. Soient  $E_j$  et  $|\phi_j\rangle$  ses valeurs et vecteurs propres. Ceux-ci suffisent pour obtenir la dynamique du système puisque l'hamiltonien est indépendant du temps. Nous allons travailler dans un espace d'Hilbert tronqué à  $N$  photons, de taille  $2N + 2$ . Pour un état initial

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{j=1}^{2N+2} c_j |\phi_j\rangle, \quad (5.21)$$

avec  $c_j = \langle \phi_j | \psi(t=0) \rangle$ , l'évolution du système au cours du temps est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{2N+2} c_j e^{-iE_j t/\hbar} |\phi_j\rangle. \quad (5.22)$$

Comme il n'est pas possible de relier analytiquement les états propres de l'hamiltonien de Rabi et les états non-couplés, nous allons calculer numériquement l'évolution du système et la comparer avec celle due à l'hamiltonien de Jaynes-Cummings. Nous nous concentrerons sur les modifications qu'entraînent les termes non-résonnants sur les oscillations de Rabi.

#### 5.3.1 Nombre d'états non-couplés contribuant aux états propres

Avant de regarder à proprement parler l'évolution du système, nous allons nous intéresser aux composantes des états propres dans la base des états non-couplés. La figure 5.11 illustre le troisième état propre de  $\mathcal{H}_-$  pour un espace tronqué à 20 photons et pour différentes valeurs de couplage. Pour  $g/\omega_0 = 0.001$ , l'état est identique à l'état propre  $|1, 2\rangle$  de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings, formé des états non-couplés  $|e, 1\rangle$  et  $|g, 2\rangle$ . Plus le couplage augmente, plus l'état propre est composé d'un grand nombre d'états non-couplés. Nous nous attendons alors à une dynamique de plus en plus complexe lorsque le couplage augmente, étant donné le nombre de transitions différentes qui peuvent alors être effectuées.

#### 5.3.2 Évolution temporelle des populations

Les oscillations de Rabi s'observent pour un système à deux niveaux. Il s'agit d'oscillations de la probabilité de transition entre ces deux états à une fréquence particulière, la fréquence de Rabi généralisée  $\Omega_{R,N} = \sqrt{\delta^2 + \Omega_N^2} = \sqrt{\delta^2 + 4g^2N}$ . Dans le cas de l'hamiltonien de Rabi, tous les niveaux d'un sous-espace de parité étant couplés ensemble, directement ou indirectement, les oscillations de Rabi laissent place à une dynamique plus compliquée. Néanmoins, nous pouvons regarder la probabilité qu'à l'atome de passer de l'état  $|e\rangle$  à l'état  $|g\rangle$  et inversement, sans tenir compte du nombre de photons du champ. Si initialement l'atome est dans l'état excité et le champ dans un état à  $i$  photons, cette probabilité est définie comme

$$P_{|e\rangle \rightarrow |g\rangle}(t) = \sum_{n=0}^N |\langle g, n | \psi(t) \rangle|^2. \quad (5.23)$$

Cette probabilité est illustrée sur la figure 5.12 pour des couplage  $g/\omega_0$  égaux à 0.1 et 0.4. Afin de rendre la comparaison plus aisée, nous avons adimensionnalisé l'axe du temps par la période d'une oscillation de Rabi prédite sur base de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings,  $2\pi/\Omega_{R,N}$ . Cette période est définie par l'état initial du système, ici  $|e, 1\rangle$ .

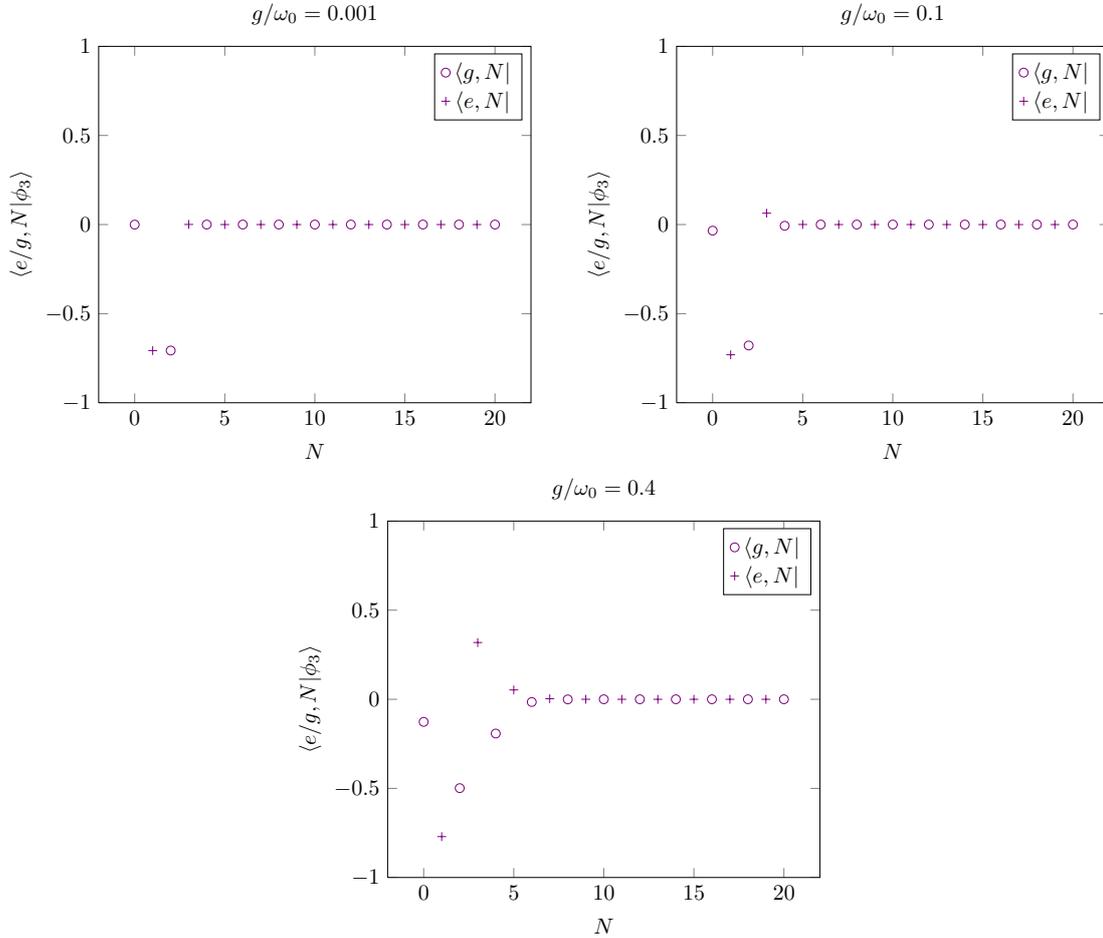


FIGURE 5.11 – Composantes du troisième état propre de  $\mathcal{H}_-$  dans la base tronquée à 20 photons des états non-couplés, en fonction du nombre de photons de l'état de la base, la base étant  $\{|g, 0\rangle, |e, 1\rangle, |g, 2\rangle, |e, 3\rangle, \dots\}$ , pour des couplages  $g/\omega_0 = 0.001$ ,  $g/\omega_0 = 0.1$  et  $g/\omega_0 = 0.4$ , et pour un désaccord en fréquence  $\delta = 0$ .

Pour  $g/\omega_0 = 0.1$ , la probabilité pour que l'atome se désexcite oscille à une fréquence proche de la fréquence de Rabi généralisée et l'amplitude des oscillations est proche de 1, montrant une dominance de la transition résonnante sur les autres. Par contre, lorsque le couplage est augmenté à  $g/\omega_0 = 0.4$ , l'atome initialement excité ne se trouve à aucun moment ultérieur dans un état totalement désexcité, ni dans un état totalement excité. Les oscillations ne sont manifestement plus monochromatiques. Ce changement est dû à l'addition de nouvelles composantes de différentes fréquences dues aux transitions non-résonnantes. Les figures suivantes montrent les populations des états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  pour différents nombres de photons dans le champ. Dans le cas  $g/\omega_0 = 0.1$ , nous retrouvons les oscillations de Rabi entre les états  $|e, 1\rangle$  et  $|g, 2\rangle$ . De plus, les états  $|g, 0\rangle$  et  $|e, 3\rangle$  possèdent une faible probabilité d'occupation de part leur transition non-résonnante avec  $|e, 1\rangle$  et  $|g, 2\rangle$ . Sous  $g/\omega_0 = 0.4$ , la transition résonnante domine toujours mais son amplitude est considérablement réduite au profit des autres transitions. Sa fréquence intrinsèque diffère légèrement de la fréquence de Rabi généralisée. Les états  $|g, 0\rangle$ ,  $|e, 3\rangle$  et  $|g, 4\rangle$  ont une probabilité non-négligeable d'occupation et l'état  $|e, 5\rangle$  commence à avoir une faible amplitude de probabilité. Les deux premières transitions non-résonnantes ont donc pris une importance considérable. Les phénomènes semblent avoir une tendance d'oscillation générale mais

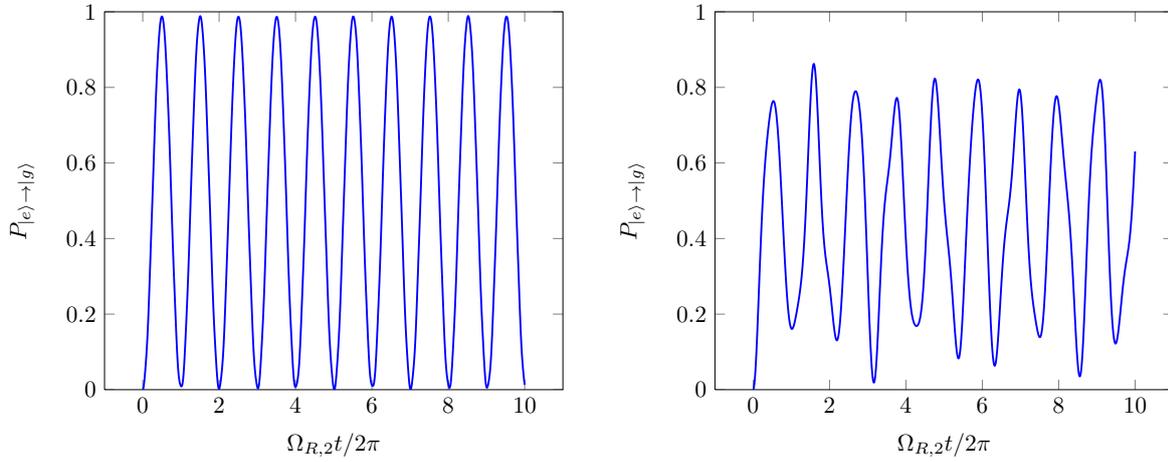


FIGURE 5.12 – Oscillations de Rabi dans  $\mathcal{H}_-$ . Probabilité pour que l'atome passe de l'état excité à l'état fondamental quel que soit le nombre de photons, pour un état initial  $|e, 1\rangle$ , un désaccord en fréquence  $\delta = 0$  et des couplages  $g/\omega_0 = 0.1$  (à gauche) et  $g/\omega_0 = 0.4$  (à droite).

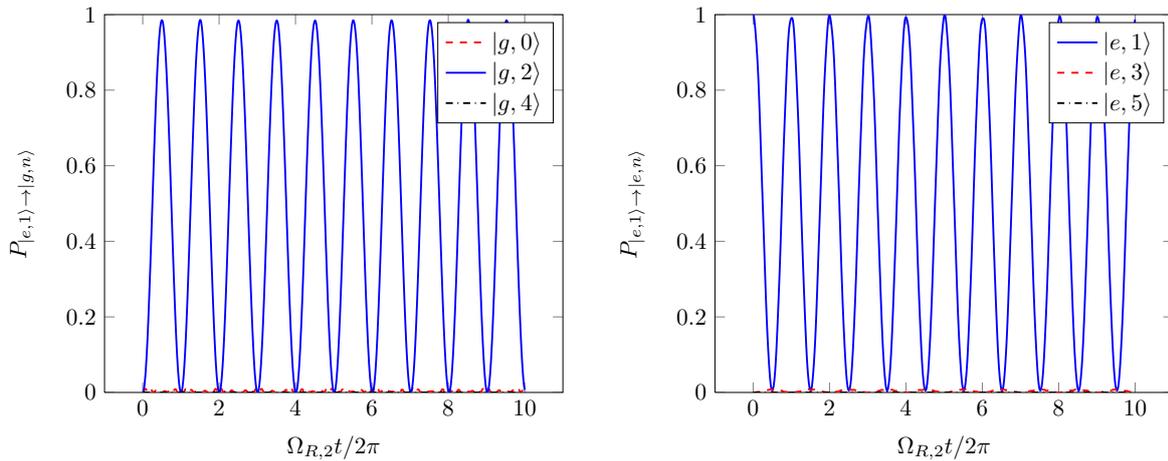


FIGURE 5.13 – Probabilité au cours du temps pour que le système "atome+champ" se trouve dans l'état  $|g, 0\rangle$ ,  $|g, 2\rangle$  ou  $|g, 4\rangle$  (à gauche) et  $|e, 1\rangle$ ,  $|e, 3\rangle$  ou  $|e, 5\rangle$  (à droite) pour un état initial  $|e, 1\rangle$ , un désaccord en fréquence  $\delta = 0$  et un couplage  $g/\omega_0 = 0.1$ .

localement ne sont pas très réguliers.

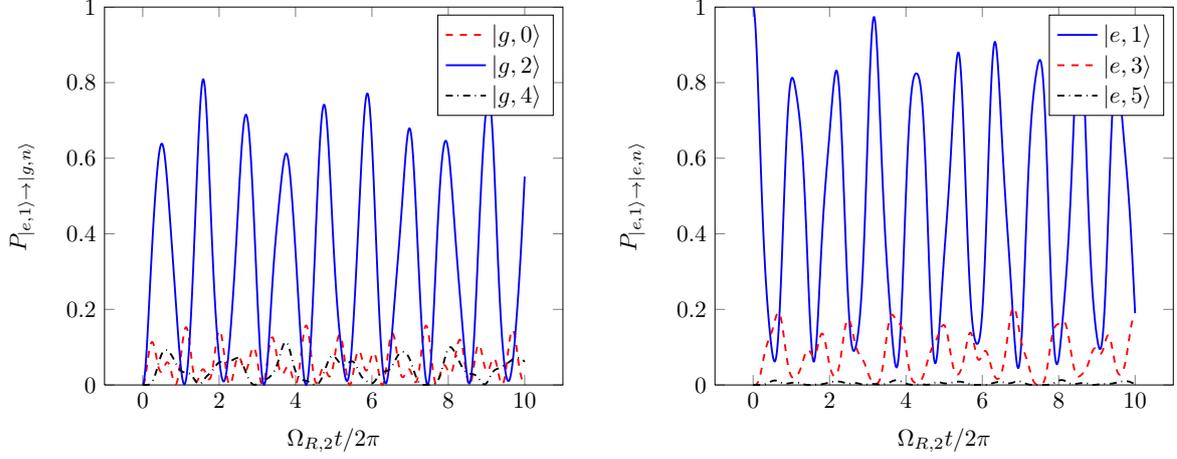


FIGURE 5.14 – Probabilité au cours du temps pour que le système "atome+champ" se trouve dans l'état  $|g, 0\rangle$ ,  $|g, 2\rangle$  ou  $|g, 4\rangle$  (à gauche) et  $|e, 1\rangle$ ,  $|e, 3\rangle$  ou  $|e, 5\rangle$  (à droite) pour un état initial  $|e, 1\rangle$ , un désaccord en fréquence  $\delta = 0$  et un couplage  $g/\omega_0 = 0.4$ .

### 5.3.3 Analyse spectrale

Nous avons appliqué une transformée de Fourier sur les signaux de la figure 5.12 afin d'obtenir le spectre en fréquence de la probabilité de transition atomique. Le résultat est représenté sur la figure 5.15. Afin d'interpréter ces résultats, nous avons également procédé à une transformée de Fourier sur les probabilités de transition relatives aux différents états non-couplés qui sont illustrées sur la figure 5.14. Sans surprise, le pic proche de la fréquence  $\Omega_{R,2}$  se retrouve dans les spectres de  $|e, 1\rangle$  et  $|g, 2\rangle$ . Il caractérise bien la transition résonnante qui menait aux oscillations de Rabi pour l'hamiltonien de Jaynes-Cummings. Nous considérons comme pertinents les trois autres pics d'amplitude élevée. Les pics en  $\omega = 1.28 \Omega_{R,2}$  et  $\omega = 2.22 \Omega_{R,2}$  se retrouvent dans les spectres de  $|e, 1\rangle$  et  $|g, 0\rangle$  tandis que celui en  $\omega = 1.62 \Omega_{R,2}$  est présent dans les spectres de  $|g, 2\rangle$  et  $|e, 3\rangle$ . Ils caractérisent les transitions non-résonnantes entre ces états. Les autres pics présents dans le spectre se retrouvent également dans les spectres de transitions non-résonnantes. Elles ne seraient donc pas monochromatiques.

Lorsque l'on s'intéresse de plus près au pic dominant de la transition résonnante, nous nous apercevons qu'il s'éloigne de la fréquence de Rabi généralisée quand le couplage augmente. Cette différence, observée dans la littérature [33, 34, 35], est due au décalage dynamique de Stark de la fréquence de transition atomique, présenté dans la section 1.3.3. Il est possible de diagonaliser l'hamiltonien effectif présenté dans cette section,

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \left[ \frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar g\epsilon \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right) \right] \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_L \hat{n} + \hbar g(\hat{n}) \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^- + \hbar \hat{a} \hat{\sigma}^+ g(\hat{n}) - \frac{\hbar g\epsilon}{2}, \quad (5.24)$$

où  $\epsilon = g/2\bar{\omega}$ , afin d'obtenir des états propres légèrement différents de ceux de Jaynes-Cummings. Pour un nombre d'excitations donné  $N$ , la différence d'énergie entre les deux états propres considérés donne la fréquence de Rabi décalée [20]

$$\Omega'_N = \sqrt{\delta_N^2 + 4g_N^2}, \quad (5.25)$$

avec

$$\delta_N = \delta + 2Ng\epsilon \quad \text{et} \quad g_N = g\sqrt{N}(1 - \epsilon^2 N). \quad (5.26)$$

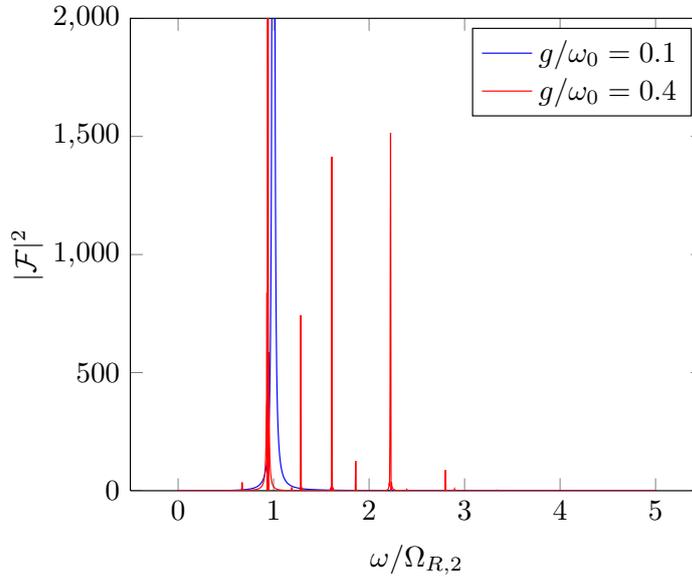


FIGURE 5.15 – Puissance spectrale des probabilités de transition atomique sous l'hamiltonien de Rabi pour un désaccord en fréquence  $\delta = 0$ .

C'est cette fréquence qui est obtenue dans l'analyse de Fourier, à la place de la fréquence de Rabi. La table 5.3 compare le rapport entre la fréquence de Rabi décalée et la fréquence de Rabi donnée par le modèle de Jaynes-Cummings pour  $N = 2$  obtenu par la formule (5.25), et celui obtenu par l'analyse de Fourier sur les résultats numériques. Nous pouvons conclure que le décalage de la fréquence de Rabi

$g/\omega_0$	$\sqrt{\delta_2^2 + 4g_2^2}/\Omega_2$	$\Omega'_{2,\text{Fourier}}/\Omega_2$
0.1	0.997	0.995
0.4	0.962	0.940

TABLE 5.3 – Rapport entre la fréquence dominante du système et la fréquence de Rabi donnée par le modèle de Jaynes-Cummings pour  $N = 2$ , calculé par la formule de l'effet Stark dynamique d'une part et obtenue numériquement d'autre part.

observé dans le spectre est bien dû au décalage dynamique de Stark. Cependant, comme l'hamiltonien (5.24) est obtenu par approximation sous la condition  $\epsilon \ll 1$ , lorsque le couplage augmente, le décalage mesuré s'éloigne de celui prédit par l'hamiltonien effectif.

### 5.3.4 Probabilité d'occupation maximale

Pour quantifier l'importance des termes non-résonnants lorsque le couplage augmente, nous avons calculé la probabilité d'occupation maximale de chaque état non-couplé  $|f\rangle$  pour un état initial  $|i\rangle$  et un couplage  $g/\omega_0$  donné,

$$P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}^{\max} = \max_{t \in [0, t_{\max}]} P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle}(t). \quad (5.27)$$

Ces probabilités sont illustrées sur les figures 5.16 et 5.17. Pour un couplage  $g/\omega_0 = 0.1$ , très peu d'états sont peuplés. Avec  $|e, 1\rangle$  comme état initial, seuls sont peuplés l'état  $|g, 2\rangle$ , qui lui est couplé de façon résonante, et les états  $|g, 0\rangle$  et  $|e, 3\rangle$ , très légèrement. En partant de l'état  $|g, 14\rangle$ , le nombre d'états peuplés augmente mais pas d'une façon très significative. Par contre, les populations de ces

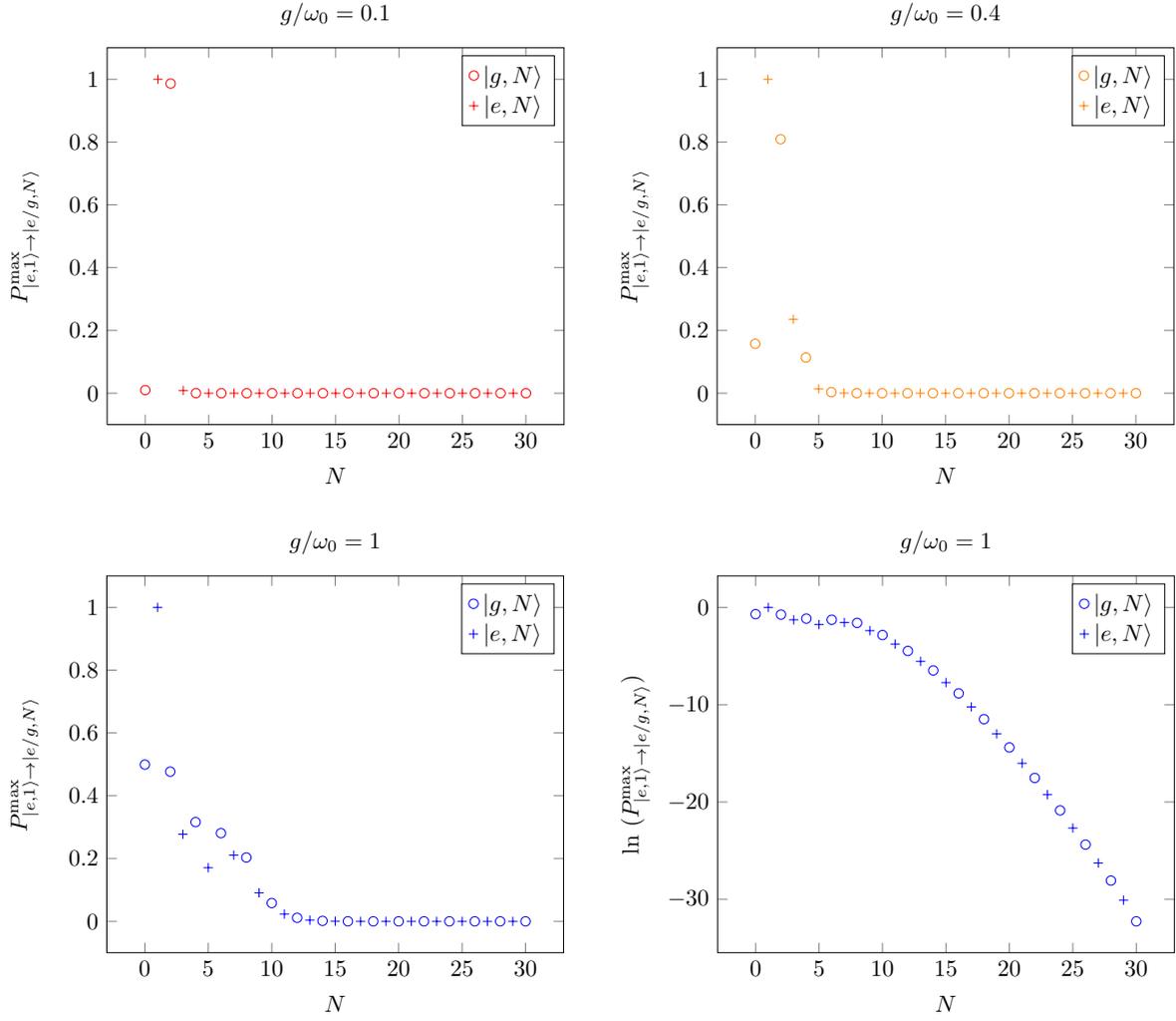


FIGURE 5.16 – Population maximale des états non-couplés de  $\mathcal{H}_-$  en fonction du nombre de photons de l'état, pour un état initial  $|e, 1\rangle$ , un désaccord en fréquence  $\delta = 0$  et des couplages  $g/\omega_0 = 0.1, 0.4$  et 1. Le maximum a été calculé sur l'intervalle de temps  $gt = [0, 150]$  avec un pas  $g\Delta t = 0.001$ .

états augmentent de façon non-négligeable. Alors que le couplage augmente, nous remarquons non seulement une augmentation du nombre de niveaux peuplés pour un état initial donné mais également une dépendance importante de cette augmentation en fonction de cet état initial. En effet, pour un couplage  $g/\omega_0 = 1$ , le nombre de niveaux peuplés de façon significative est passé d'une douzaine à partir de  $|e, 1\rangle$  à une trentaine pour  $|g, 14\rangle$ . Nous en déduisons donc que le nombre d'états peuplés ne dépend pas seulement du couplage mais dépend également de l'état initial. Cela s'explique par le fait que l'énergie du système doit être conservée mais que les transitions non-résonnantes ne la conservent pas. Lorsque des états d'énergie plus élevée que l'état initial sont peuplés, le système nécessite une transition diminuant l'énergie, vers les états de plus basse énergie. Plus l'état initial du système possède une énergie élevée, plus celui-ci aura de possibilités dans les états de basse énergie et plus il pourra peupler d'états différents en conservant son énergie. La conservation de l'énergie au cours des simulations a été vérifiée avec la formule

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle (t) &= \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N E_j \langle \psi(t) | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N E_j |\langle \psi(t) | \phi_j \rangle|^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

La loi de conservation de l'énergie peut également se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_{\text{Rabi}} \rangle (t) &= \langle \hat{H}_{\text{Rabi}} \rangle (0) \\ \Leftrightarrow \langle \hat{H}_A + \hat{H}_R \rangle (t) + \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle (t) &= \langle \hat{H}_A + \hat{H}_R \rangle (0) \\ \Leftrightarrow \langle \hat{H}_A + \hat{H}_R \rangle (t) - \langle \hat{H}_A + \hat{H}_R \rangle (0) &= - \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle (t), \end{aligned} \quad (5.29)$$

si l'état initial du système est un état non-couplé, état propre de l'hamiltonien  $\hat{H}_A + \hat{H}_R$  avec  $\langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = 0$ . Cela confirme que lorsque l'énergie de couplage est élevée, le système "atome + champ" peut se trouver dans des états non-couplés d'énergie fortement différente de celle de l'état initial. Nous pouvons en conclure que la dynamique du système se complique d'une part lorsque le couplage augmente mais aussi lorsque le nombre d'excitations initial du système devient plus important. L'évolution temporelle du système en sera d'autant plus complexe, faisant intervenir de nombreuses fréquences différentes.

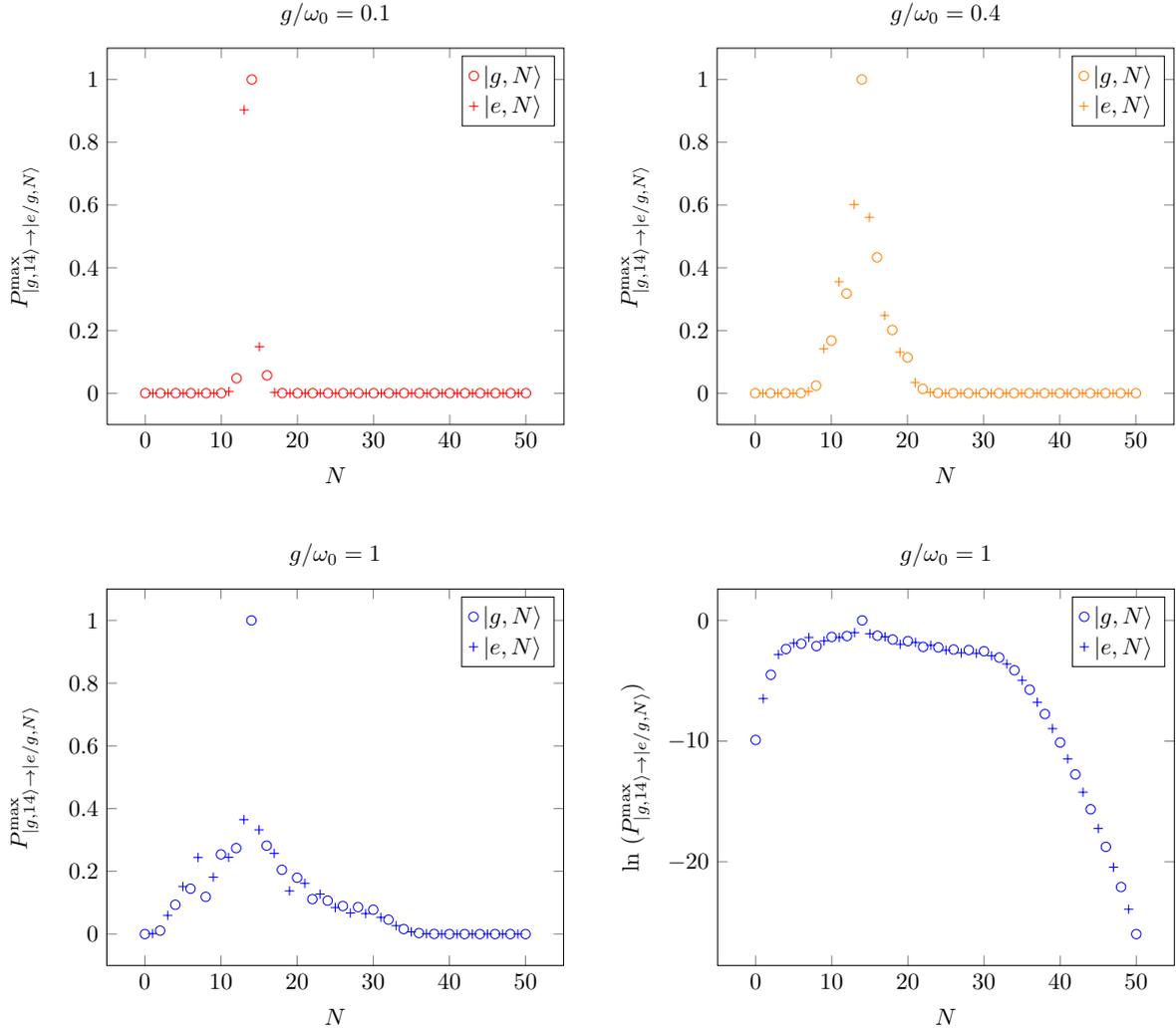


FIGURE 5.17 – Population maximale des  tats non-couplés de  $\mathcal{H}_-$  en fonction du nombre de photons de l'état, pour un état initial  $|g, 14\rangle$ , un désaccord en fréquence  $\delta = 0$  et un couplage  $g/\omega_0 = 0.1, 0.4$  et 1. Le maximum a été calculé sur l'intervalle de temps  $gt = [0, 150]$  avec un pas  $g\Delta t = 0.001$ .



# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié le modèle de Rabi tant par une approche analytique que numérique. Nous nous sommes intéressée à différents aspects de ce modèle, comme ses diverses implémentations physiques, sa résolution analytique, ou la répulsion de niveaux et l'évolution des populations qui en découlent. Nous avons également mis en évidence ses spécificités par rapport au modèle de Jaynes-Cummings.

Au chapitre 1, nous avons montré comment l'interaction d'un atome avec un mode du champ électromagnétique mène au modèle de Rabi. Nous avons discuté des différents termes composant l'hamiltonien de Rabi et calculé leurs importances relatives à l'aide de la théorie des perturbations. Nous avons montré qu'il se réduit à l'hamiltonien de Jaynes-Cummings dans le régime de couplage faible. Nous avons également présenté les lois de conservation associées à ces deux hamiltoniens, qui s'avèrent jouer un rôle crucial dans la recherche de solutions analytiques et dans la compréhension des dynamiques qu'ils engendrent.

Dans le chapitre 2, nous avons discuté de deux autres systèmes physiques dont la dynamique est bien décrite par le modèle de Rabi. D'abord, nous nous sommes intéressée aux jonctions Josephson à base de supraconducteurs. Nous avons montré que celles-ci peuvent être utilisées comme bits quantiques (qubits). Le couplage d'un tel qubit à un résonateur électronique est décrit par l'hamiltonien de Rabi. Ces systèmes permettent d'atteindre le régime de couplage fort, ce qui motive pleinement d'aller au delà du modèle de Jaynes-Cummings et d'étudier le modèle de Rabi. Par ailleurs, nous avons présenté l'approche semi-classique qu'Isidor Rabi a mise en oeuvre lors de la dérivation de son modèle dans le cadre des premières expériences de résonance magnétique nucléaire (RMN).

Au chapitre 3, nous avons exposé la résolution analytique du modèle de Jaynes-Cummings. Nous avons présenté la diagonalisation par bloc de l'hamiltonien s'appuyant sur la conservation du nombre d'excitations. Nous avons discuté des phénomènes d'oscillations de Rabi, de collapse-revival et de répulsion de niveaux. Ce modèle nous a servi de point de comparaison pour l'étude du modèle de Rabi.

Dans les chapitres 4 et 5, qui forment le coeur de ce travail, nous avons présenté les deux approches utilisées pour étudier le modèle de Rabi. Au chapitre 4, nous nous sommes penchée sur les travaux de Braak et les avons développés en détails. Cet auteur a trouvé une solution analytique au modèle de Rabi en s'appuyant sur la conservation de la parité et la représentation de Bargmann des états quantiques. Nous avons introduit ce formalisme dans le cas simple d'un oscillateur harmonique et nous l'avons ensuite particularisé au cas du modèle de Rabi. Il était de surcroit essentiel de trouver la transformation inverse pour passer des fonctions de Bargmann aux vecteurs dans la base des états non-couplés, Braak se contentant de travailler avec ces fonctions. Nous avons détaillé les calculs qui lui ont permis de dériver les fonctions dont les zéros sont liés aux valeurs propres du système et avons exposé comment ceux-ci donnent également accès aux états propres.

Au chapitre 5, nous avons réalisé une étude numérique du modèle de Rabi. Dans ce but, nous avons tronqué la base de l'espace d'Hilbert afin de ramener l'hamiltonien à une matrice de dimension finie

que nous avons ensuite diagonalisée pour trouver les valeurs et vecteurs propres. Dans un premier temps, il a fallu vérifier la convergence de nos résultats en fonction du nombre de photons que contient l'espace d'Hilbert tronqué. Dans un second temps, nous avons comparé les valeurs obtenues avec celles résultant des expressions analytiques, dérivées au chapitre 4. Une fois la cohérence des résultats assurée, nous nous sommes longuement attardée sur la répulsion des niveaux d'énergie lorsqu'un paramètre varie, comme le désaccord en fréquence ou le couplage. Les résultats que nous avons obtenus montrent une grande différence entre les modèles de Jaynes-Cummings et de Rabi. Nous avons expliqué les nouvelles répulsions observées dans les spectres de façon qualitative puis quantitative en faisant appel à la théorie des perturbations. Celle-ci nous a donné des résultats en accord avec ceux des simulations numériques. Les amplitudes de répulsion occasionnées par les termes non-résonnants sont généralement plus faibles que celles dues aux couplages résonnants pour  $g/\omega_0 \lesssim 1$ , même si elles augmentent de façon significative avec le couplage. Nous avons enfin étudié l'impact des termes non-résonnants sur l'évolution temporelle du système. Préalablement, il était intéressant de regarder la composition des états propres en termes d'états non-couplés puisque les transitions ont lieu entre ces derniers. Le nombre d'états non-couplés pour former un état propre augmente considérablement avec le couplage, présageant une complication de la dynamique. Nous avons alors présenté l'évolution temporelle des populations. Afin d'expliquer l'origine des modifications observées par rapport aux oscillations de Rabi, nous avons procédé à une analyse de Fourier des résultats. Nous en avons conclu l'augmentation progressive des différentes transitions non-résonnantes entre les niveaux non-couplés au fur et à mesure que le couplage augmente. Pour soutenir ces résultats, nous avons présenté les populations maximales des états non-couplés pour différents couplages mais aussi pour différents états initiaux du système. Ces derniers se révèlent fort importants car ils fixent l'énergie moyenne que le système doit conserver tout au long du temps, alors qu'il effectue des transitions vers des états d'énergie différentes.

Pour conclure, le modèle de Rabi a été remis au goût du jour afin de rendre compte de la dynamique d'un système à deux niveaux fortement couplé à un mode bosonique, système pour lequel le modèle de Jaynes-Cummings fait défaut. L'étude du modèle de Rabi est vaste et nous avons essayé d'en présenter un aperçu global. Plusieurs pistes se dégagent pour des études plus poussées, comme la généralisation à plusieurs atomes couplés à un mode bosonique commun (modèle de Dicke) ou l'étude du régime de couplage ultrafort ( $g/\omega_0 \gg 1$ ).

# Annexe A

## Théorie des perturbations

L'évolution d'un système physique est dictée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (\text{A.1})$$

avec  $|\psi(t)\rangle$  la fonction d'onde représentant l'état du système à l'instant  $t$  et  $\hat{H}(t)$  son hamiltonien. Si  $\hat{H}$  est indépendant du temps et que ses valeurs propres  $E_n$  et vecteurs propres  $|\phi_n\rangle$  sont connus, l'état du système au temps  $t$  est donné par

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\phi_n\rangle, \quad (\text{A.2})$$

s'il était dans l'état

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle \quad (\text{A.3})$$

au temps initial  $t_0$ .

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible de calculer exactement les valeurs et vecteurs propres de l'hamiltonien mais il arrive souvent que celui-ci puisse s'écrire sous la forme

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{W}(t), \quad (\text{A.4})$$

où  $\hat{H}_0$  est indépendant du temps et dont on sait résoudre l'équation aux valeurs propres.  $\hat{W}(t)$  est très petit devant  $\hat{H}_0$  et va être considéré comme une perturbation sur le système indépendant du temps. Si elle est indépendante du temps, la perturbation va agir sur les énergies propres du système et leur modification sont données par la théorie des perturbations dites indépendantes du temps [36]. De plus, la dynamique du système sera affectée par la présence de la perturbation, qu'elle soit dépendante du temps ou non. L'évolution du système est alors donnée par la théorie des perturbations dites dépendantes du temps.

### A.1 Théorie des perturbations indépendantes du temps

La théorie des perturbations indépendantes du temps permet de décrire l'effet d'une perturbation sur les états propres du système.

#### A.1.1 Corrections sur les énergies et vecteurs propres

Soient  $|\phi_n\rangle$  les états propres d'énergie  $E_n$  de l'hamiltonien indépendant du temps  $\hat{H}_0$ . L'hamiltonien du système perturbé s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (\text{A.5})$$

avec  $\hat{W} \ll \hat{H}_0$ .

$$\hat{H} |\Phi_n\rangle = E'_n |\Phi_n\rangle \quad (\text{A.6})$$

est l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien total, insoluble.

La théorie des perturbations donne une approximation pour ces solutions. Elle permet d'écrire les énergies propres  $E'_n$  sous la forme d'un développement en série autour de  $E_n$ ,

$$E'_n = E_n + \delta E_n^{(1)} + \delta E_n^{(2)} + \dots, \quad (\text{A.7})$$

et de la même façon, les vecteurs propres  $|\Phi_n\rangle$  à partir des  $|\phi_n\rangle$ ,

$$|\Phi_n\rangle = |\phi_n\rangle + \delta |\phi_n^{(1)}\rangle + \dots. \quad (\text{A.8})$$

### Niveaux non-dégénérés

Dans le cas où le niveau  $E_n$  est non-dégénéré, les énergies propres sont corrigées par

$$\delta E_n^{(1)} = \langle \phi_n | \hat{W} | \phi_n \rangle, \quad (\text{A.9})$$

$$\delta E_n^{(2)} = \sum_{n' \neq n} \frac{|\langle \phi_{n'} | \hat{W} | \phi_n \rangle|^2}{E_n - E_{n'}}, \quad (\text{A.10})$$

respectivement au premier et au deuxième ordre. La correction sur les vecteurs propres au premier ordre est donnée par

$$\delta |\phi_n^{(1)}\rangle = \sum_{n' \neq n} \frac{\langle \phi_{n'} | \hat{W} | \phi_n \rangle}{E_n - E_{n'}} |\phi_{n'}\rangle. \quad (\text{A.11})$$

### Niveaux dégénérés

Si plusieurs états propres correspondent à l'énergie  $E_n$ , les corrections sur celle-ci peuvent dépendre du vecteur propre choisi. La perturbation permet alors de lever la dégénérescence de ce niveau d'énergie, partiellement ou totalement.

Les différents vecteurs propres d'énergie  $E_n$  s'écrivent  $|\phi_{n,r}\rangle$ ,  $r \in [1; g_n]$  où  $g_n$  est le degré de dégénérescence de l'énergie  $E_n$ . Afin de calculer les corrections sur les énergies et les vecteurs propres, il est nécessaire d'introduire la matrice d'interaction du niveau dégénéré

$$MI = \begin{pmatrix} \langle \phi_{n,1} | \hat{W} | \phi_{n,1} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n,1} | \hat{W} | \phi_{n,g_n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_{n,g_n} | \hat{W} | \phi_{n,1} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n,g_n} | \hat{W} | \phi_{n,g_n} \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Les corrections au premier ordre sur les énergies sont données par les valeurs propres de la matrice d'interaction et les vecteurs propres sont corrigés à l'ordre 0

$$|\phi_{n,r}^{(0)}\rangle = \sum_{r'} c_{n,r,r'} |\phi_{n,r'}\rangle, \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\begin{pmatrix} c_{n,r,1} \\ \vdots \\ c_{n,r,g_n} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

le vecteur propre de la matrice d'interaction relatif à sa valeur propre  $r$ .

### A.1.2 Probabilités de transitions

La fonction d'onde du système total s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |\phi_n\rangle, \quad (\text{A.15})$$

avec

$$c_n(t) = c_n^{(0)}(t) + c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots \quad (\text{A.16})$$

Si  $|\psi(t_0)\rangle = |\phi_i\rangle$ ,

$$c_n^{(0)} = \delta_{ni}, \quad (\text{A.17})$$

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}t'} \langle \phi_n | \hat{W} | \phi_i \rangle dt', \quad (\text{A.18})$$

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \sum_j c_j^{(1)}(t') e^{i\omega_{nj}t'} \langle \phi_n | \hat{W} | \phi_j \rangle dt', \quad (\text{A.19})$$

où  $\omega_{ab} = E_a - E_b/\hbar$ .

La probabilité qu'au temps  $t$  le système soit dans l'état  $|\phi_f\rangle$  est donnée par

$$P_{if}(t) = |\langle \phi_f | \psi(t) \rangle|^2 \quad (\text{A.20})$$

$$= |c_f(t)|^2 \quad (\text{A.21})$$

$$= |c_f^{(k)}(t)|^2, \quad (\text{A.22})$$

$c_f^{(k)}$  étant le premier terme non-nul du développement en série de  $c_f$ .

Au premier ordre, la probabilité que le système ait évolué de l'état  $|\phi_i\rangle$  vers l'état  $|\phi_f\rangle$  après un temps  $t$  est

$$P_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t e^{i\omega_{fi}t'} \langle \phi_f | \hat{W} | \phi_i \rangle dt' \right|^2. \quad (\text{A.23})$$

Ce processus est appelé transition au premier ordre. Plus les transitions sont d'ordre élevé, moins elles sont probables.

$$P_{if}(t) = \frac{|\langle \phi_f | \hat{W} | \phi_i \rangle|^2}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t e^{i\omega_{fi}t'} dt' \right|^2 \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} |\langle \phi_f | \hat{W} | \phi_i \rangle|^2 \frac{\sin(\omega_{fi}(t-t_0)/2)}{(\omega_{fi}(t-t_0)/2)^2} (t-t_0)^2 \quad (\text{A.25})$$

$$\propto \frac{|\langle \phi_f | \hat{W} | \phi_i \rangle|^2}{(E_f - E_i)^2}. \quad (\text{A.26})$$



# Bibliographie

- [1] I. Rabi, Phys. Rev. **49**, 324 (1935).
- [2] I. Rabi, Phys. Rev. **51**, 652 (1937).
- [3] A. Blais *et al.*, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- [4] J.-M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [5] J. Pedernales *et al.*, arXiv :1505.00698.
- [6] A. Blais, Physics in Canada **67**, 123 (2011).
- [7] A. Zagoskin et A. Blais, Physics in Canada **63**, 215 (2007).
- [8] J. Keeling *Light-Matter Interactions and Quantum Optics* (<http://www.st-andrews.ac.uk/~jmjk/index.shtml>).
- [9] A. Blais, Master thesis, Université de Sherbrooke (1999).
- [10] L. Bishop *et al.*, Nat. Phys. **5**, 105 (2009).
- [11] E. Jaynes et F. Cummings, Proc. IEEE. **51**, 89 (1963).
- [12] T. Niemczyk *et al.*, Nature Physics **6**, 772 (2010).
- [13] D. Braak, Phys. Rev. Lett. **107**, 100401 (2011).
- [14] J. Klauder, *Valentine Bargmann*, National Academies Press Washington D.C. (1999).
- [15] D. Braak, J. Phys. A : Math. Theor. **46**, 175301 (2013).
- [16] A. Maciejewski, M. Przybylska, T. Stachowiak, Phys. Lett. A **378**, 3445 (2014).
- [17] Q. Chen, C. Wang, K. Wang, Phys. Rev. A **86**, 023822 (2012).
- [18] T. Bastin, *Introduction à l'optique quantique*, Notes de cours, Université de Liège.
- [19] C. Tannoudji, J. Dupond-Roc et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, EDP Sciences (2000).
- [20] A. Klimov et S. Chumakov, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*, Wiley-VCH (2009).
- [21] F. A. Wolf, M. Koller et D. Braak, Phys. Rev. A **85** 1053817 (2012).
- [22] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, Dover Publications inc. (2004).
- [23] R. Feynmann, R. Leighton et M. Sand, *Le cours de physique de Feynmann. Mécanique quantique* Dunod (2000).
- [24] S. Haroche, *Synthèse, contrôle et protection d'états quantiques ; La physique de la jonction Josephson*, Cours du Collège de France (2011).
- [25] M. Le Bellac, *Physique quantique*, EDP Sciences (2007).
- [26] G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre, *Introduction to quantum optics. From the semi-classical approach to quantized light*, Cambridge University Press (2010).
- [27] F. Haake, *Quantum signatures of chaos*, Springer (2001).
- [28] J. Rubbmark, M. Kash, M. Littman et D. Kleppner, Phys. Rev. A **23**, 3107 (1981).

- 
- [29] R. R. Puri, *Mathematical Methods of Quantum Optics*, Cambridge University Press (1985).
  - [30] L. Biedenharn et J. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics*, Cambridge University Press (1985).
  - [31] M. Wubs, K. Saito, S. Kohler, Y. Kayanuma et P. Hanggi, *New Journal of Phys.* **7**, 218 (2005).
  - [32] S. Shevchenko, A. Kiyko, A. Omelyanchouk et W. Krech, *Low Temp. Phys.* **31**, 569 (2005).
  - [33] P. Forn-Diaz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 237001 (2010).
  - [34] L. Henriët, Z. Ristivojevic, P. Orth et K. Le Hur, *Phys. Rev. A* **90**, 023820 (2014).
  - [35] Y. Yan, Z. Lü et H. Zheng, *Phys. Rev. A* **91**, 053834 (2015).
  - [36] C. Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique, vol. 2*, Hermann (1973).