

Table des matières

Introduction	1
1 Les détecteurs d'ondes gravitationnelles	4
1.1 Comment détecter une onde gravitationnelle?	4
1.1.1 Description de l'interféromètre Michelson	4
1.1.2 Effet du passage d'une onde gravitationnelle	6
1.2 L'interférométrie à ondes gravitationnelles	9
1.2.1 Améliorations de l'interféromètre Michelson	9
1.2.2 Sources de bruit dans un interféromètre	10
2 Les sources d'ondes gravitationnelles	13
2.1 Pourquoi vouloir détecter des ondes gravitationnelles?	14
2.1.1 La coalescence d'un système binaire	14
2.1.2 L'effondrement gravitationnel	21
3 Eléments d'optique quantique	25
3.1 Quantification du champ électrique	25
3.2 Les états quantiques de la lumière	27
3.2.1 Les états de Fock	27
3.2.2 Les états cohérents	28
3.2.3 Les états comprimés dégénérés	30
3.3 La détection homodyne	33
3.4 Le formalisme à deux photons	35
3.4.1 Réexpression du champ électrique	35
3.4.2 Les états comprimés non dégénérés	36
4 Le bruit quantique et la limite quantique standard	42
4.1 Traitement quantique de l'interféromètre Michelson	42
4.1.1 Les champs dans l'interféromètre	42
4.1.2 Pression de radiation sur les miroirs	49
4.1.3 La limite quantique standard	51
5 Mesures quantiques non destructives	56
5.1 L'injection d'états comprimés de la lumière	56
5.2 La lecture variationnelle	58
5.3 Le recyclage de signal	60
5.4 Argument général sur la limite quantique standard	65
Conclusion	67
Bibliographie	69

« Voici encore des arbres et je connais leur rugueux, de l'eau et j'éprouve sa saveur. Ces parfums d'herbe et d'étoiles, la nuit, certains soirs où le coeur se détend, comment nierais-je ce monde dont j'éprouve la puissance et les forces ? Pourtant toute la science de cette terre ne me donnera rien qui puisse m'assurer que ce monde est à moi. Vous me le décrivez et vous m'apprenez à le classer. Vous énumérez ses lois et dans ma soif de savoir je consens qu'elles soient vraies. Vous démontez son mécanisme et mon espoir s'accroît. Au terme dernier, vous m'apprenez que cet univers prestigieux et bariolé se réduit à l'atome et que l'atome lui-même se réduit à l'électron. Tout ceci est bon et j'attends que vous continuiez. Mais vous me parlez d'un invisible système planétaire où des électrons gravitent autour d'un noyau. Vous m'expliquez ce monde avec une image. Je reconnais alors que vous en êtes venus à la poésie : je ne connaîtrai jamais. Ai-je le temps de m'en indigner ? Vous avez déjà changé de théorie. Ainsi cette science qui devait tout m'apprendre finit dans l'hypothèse, cette lucidité sombre dans la métaphore, cette incertitude se résout en oeuvre d'art. Qu'avais-je besoin de tant d'efforts ? Les lignes douces de ces collines et la main du soir sur ce coeur agité m'en apprennent bien plus. Je suis revenu à mon commencement. Je comprends que si je puis par la science saisir les phénomènes et les énumérer, je ne puis pour autant appréhender le monde. Quand j'aurais suivi du doigt son relief tout entier, je n'en saurais pas plus. Et vous me donnez à choisir entre une description qui est certaine, mais qui ne m'apprend rien, et des hypothèses qui prétendent m'enseigner, mais qui ne sont point certaines. Etranger à moi-même et à ce monde, armé pour tout secours d'une pensée qui se nie elle-même dès qu'elle affirme, quelle est cette condition où je ne puis avoir la paix qu'en refusant de savoir et de vivre, où l'appétit de conquête se heurte à des murs qui défient ses assauts ? Vouloir, c'est susciter les paradoxes. Tout est ordonné pour que prenne naissance cette paix empoisonnée que donnent l'insouciance, le sommeil du coeur ou les renoncements mortels. L'intelligence aussi me dit donc à sa manière que ce monde est absurde. »

Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe*.

Introduction

Début 2016, une nouvelle a fait grand bruit dans la communauté scientifique et même au delà : le 15 septembre 2015 à 9:50:45, la toute première détection d'une onde gravitationnelle fut enregistrée par les détecteurs de la collaboration LIGO [1]. Cette détection confirma définitivement l'existence de ces ondes, soutenant une fois de plus la robustesse de la théorie de la gravitation développée par Albert Einstein. Cette onde gravitationnelle fut générée par la fusion de deux trous noirs de 29 et 36 masses solaires, le trou noir final étant de 62 masses solaires. La puissance libérée lors de cet évènement surpassa pendant une fraction de seconde l'entièreté de la puissance lumineuse de l'univers observable, trois masses solaires étant rayonnées sous forme d'ondes gravitationnelles.

Toutefois, malgré l'ampleur de ce phénomène, l'effet de celui-ci une fois arrivé sur Terre est assez ténu et sa détection n'est pas chose aisée. Preuve de cette difficulté, l'évènement du 15 septembre fit même l'objet du prix Nobel de physique en 2017, décerné à R. Weiss, B. C. Barish et K. Thorne pour leurs contributions à l'élaboration des détecteurs LIGO et l'observation des ondes gravitationnelles. Nous le verrons par la suite, les instruments permettant ces observations sont parmi les plus précis jamais réalisés et leur confection demande la mise en commun de savoirs venant de disciplines très variées.

Tout comme l'observation astronomique de nouvelles fréquences d'ondes électromagnétiques a systématiquement apporté de nouvelles informations sur l'univers, on en attend autant de l'astronomie à ondes gravitationnelles (voire plus car la nature de ces deux ondes est totalement différente), pas seulement en astrophysique et en cosmologie mais aussi dans le cadre de la physique fondamentale. En effet, les masses et les vitesses en jeu lors d'une génération d'ondes gravitationnelles étant très élevées, l'étude de la forme de ces ondes permet de tester la relativité générale dans des régimes extrêmes. Afin de pouvoir retirer une quelconque information de la forme du signal reçu par un détecteur, il faut pouvoir le comparer avec un modèle théorique. Pour cela, de grands efforts de recherche sont entrepris dans la modélisation numérique des ondes gravitationnelles et dans leur expression analytique.

Vu l'actualité brûlante de l'astronomie à ondes gravitationnelles, c'est un domaine de recherche en évolution constante. Ne fut-ce que parce que l'on vient de passer de la détection de quelques évènements par an à au moins un évènement par semaine. Ceci grâce aux modifications majeures apportées aux détecteurs qui ont permis d'améliorer leur précision et donc de détecter des sources d'ondes gravitationnelles situées à des distances plus grandes. Remarquons qu'une augmentation de la distance de détection d d'un facteur 10 implique une fréquence de détection 1000 fois supérieure car les sources se dispersent dans une sphère centrée sur la Terre dont le volume évolue en d^3 . Une grande part de la recherche liée aux ondes gravitationnelles vise donc à trouver des moyens pour améliorer cette précision de mesure afin d'augmenter le nombre d'évènements détectés.

Ce mémoire s'inscrit dans ce cadre et une grande partie de celui-ci sera consacrée à l'étude des détecteurs à ondes gravitationnelles et à leur optimisation. L'objectif principal de ce travail est ainsi de donner une vue d'ensemble sur le fonctionnement de ces détecteurs et d'expliquer comment il est possible avec ceux-ci de détecter une onde gravitationnelle. Nous nous intéresserons donc aux sources de bruit présentes dans l'instrument et plus particulièrement à l'une

d'entre elle : le bruit quantique. Ce dernier n'est pas propre aux détecteurs à ondes gravitationnelles et est présent dans une grande variété d'expériences. Celles-ci ont en commun que leur niveau de précision est tel que les fluctuations dues à la nature fondamentalement probabiliste de la mécanique quantique ont un impact non négligeable sur l'incertitude des valeurs mesurées.

Sans trop entrer dans les détails, le bruit quantique dans le cadre d'une mesure continue est en fait la somme de deux bruits différents.

- Le premier, le bruit de mesure, est assez évident et résulte directement du caractère aléatoire dans la valeur d'une observable mesurée.
- Le second s'appelle bruit de réaction (*back-action noise* en anglais) et résulte de la perturbation aléatoire qu'une mesure induit sur le système physique observé. Dans le cas d'une mesure unique, ce bruit n'a aucune influence sur le résultat. Cependant dans notre cas, on cherche à mesurer en continu l'effet d'une onde gravitationnelle sur le système observé. Si ce dernier est trop fortement perturbé par une première mesure, cela se ressentira sur la mesure suivante.

Un problème apparaît alors car diminuer le bruit de mesure implique d'augmenter le bruit de réaction et inversement. On se rend donc compte qu'il existe une précision de mesure optimale qui permet d'égaliser ces deux bruits et ainsi de minimiser le bruit quantique. Cette précision optimale porte le nom de limite quantique standard.

L'étude du bruit quantique a longtemps été une curiosité théorique mais elle prend aujourd'hui une place de plus en plus importante dans la recherche expérimentale. En effet, malgré son nom, la limite quantique standard n'est en fait pas une barrière fondamentale à la précision d'une mesure et différentes techniques ont été développées afin de la dépasser. Une première expérience a d'ailleurs été menée qui a permis d'effectivement observer un dépassement de cette limite [2]. C'est un excellent signe puisque les méthodes permettant de dépasser la limite quantique standard dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles devraient prochainement être installées.

Dans le cadre de ce mémoire, nous serons donc amenés à déterminer quelle est l'origine de ces deux contributions au bruit quantique. Nous verrons quelle forme prend la limite quantique standard et à quel point elle peut avoir un impact sur la précision de l'instrument. Enfin, nous terminerons ce travail par la présentation des principales méthodes permettant de surpasser cette limite développées dans le cadre spécifique des détecteurs à ondes gravitationnelles.

La structure de ce mémoire est la suivante. Le premier chapitre présentera les détecteurs à ondes gravitationnelles de façon générale. Nous verrons comment l'amplitude d'une onde gravitationnelle peut être mesurée à l'aide de ceux-ci et comment cela fut possible expérimentalement. Pour cela, nous présenterons succinctement les différentes sources de bruit présents dans ces instruments et décrirons les différents moyens ayant permis de les réduire.

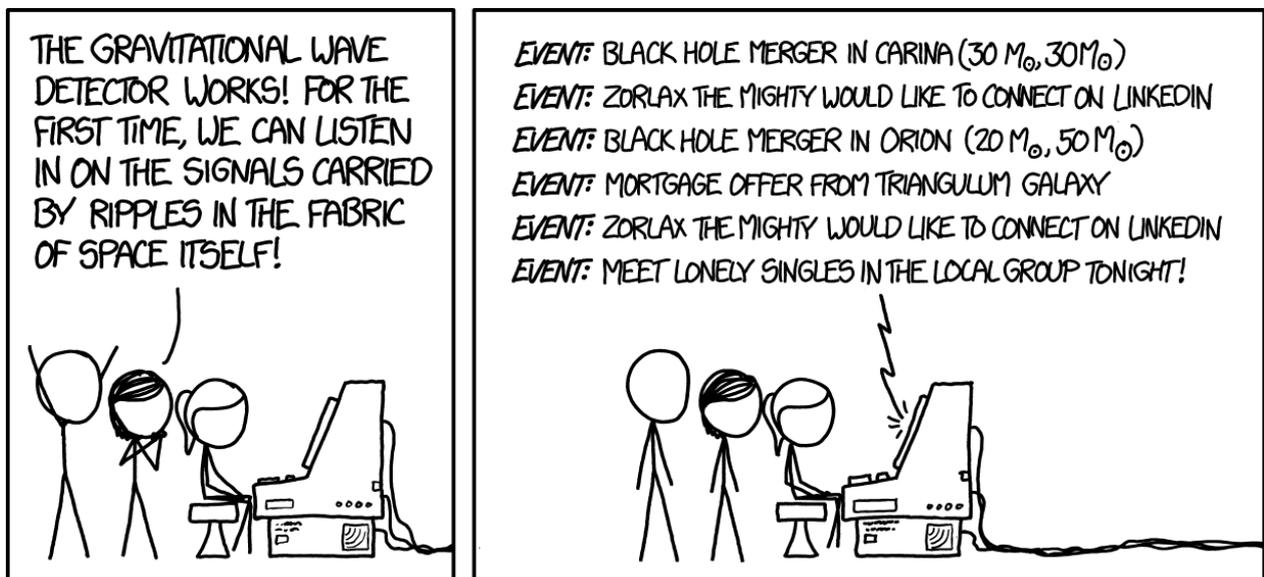
Le deuxième chapitre traitera des motivations scientifiques relatives à la détection des ondes gravitationnelles. Nous verrons comment il est possible de tester la relativité générale à l'aide de la forme de ces ondes, de discuter de la nature des trous noirs ou encore de tirer des informations des ondes gravitationnelles provenant d'une supernova.

Le troisième chapitre sera consacré à la quantification du champ électromagnétique et servira principalement de support théorique aux deux derniers chapitres. Il sera principalement question des formalismes à un et deux photons et des états quantiques de la lumière.

Le quatrième chapitre fera l'objet d'un traitement complet du bruit quantique dans un détecteur à ondes gravitationnelles. Nous y dériverons l'expression de la limite quantique standard. Nous discuterons de celle-ci en profondeur afin que le lecteur ait une idée précise de son origine et de ses implications quant à la précision de mesure de l'instrument.

Le cinquième et dernier chapitre aura pour but de présenter les principales méthodes développées afin de surpasser la limite quantique standard, du moins théoriquement. Nous verrons que celles-ci partagent toutes un point commun et nous expliciterons l'origine de ce dernier.

L'auteur de ce mémoire vous souhaite d'ors et déjà une heureuse lecture !



Source : <https://www.xkcd.com/>

Chapitre 1

Les détecteurs d'ondes gravitationnelles

La détection des ondes gravitationnelles est l'achèvement de plusieurs décennies de recherches et d'expérimentations qui ont permis l'élaboration des instruments parmi les plus précis jamais construits. Ce premier chapitre va nous permettre de présenter ces détecteurs et leur réponse au passage d'une onde gravitationnelle. L'effet de ce passage étant ténu, nous verrons ensuite les différentes techniques mises en oeuvre afin d'atteindre la précision requise pour l'observation de ces ondes.

1.1 Comment détecter une onde gravitationnelle ?

L'instrument privilégié pour la détection d'ondes gravitationnelles, et que nous étudierons donc par la suite, est l'interféromètre Michelson utilisé la première fois dans l'expérience de Michelson-Morley. Cette expérience permit de démontrer l'inexistence de l'éther et fut donc crucial dans le développement de la relativité restreinte. Grâce à la détection des ondes gravitationnelles, l'interféromètre s'avère, en plus, tout aussi important dans le cadre de la relativité générale ! Précisons que le premier instrument employé pour la détection d'ondes gravitationnelles n'est pas l'interféromètre mais la barre résonante, concept développé par Joseph Weber. Cependant, ces barres n'ont pas permis de détection jusqu'à présent mais sont toujours développées, par exemple AURIGA en Italie [3].

1.1.1 Description de l'interféromètre Michelson

Un interféromètre Michelson est un instrument expérimental composé de deux bras dans lesquels circule une onde électromagnétique résultant de la séparation d'un faisceau laser sur une lame séparatrice transparente, voir Figure 1.1. A la fin de chaque bras se trouve un miroir permettant de réfléchir le faisceau et de le renvoyer sur la lame séparatrice. Les deux ondes provenant de chaque bras se recombinaient et on obtient ainsi des interférences qui dépendront de la phase de chacune des ondes. Cet interféromètre permet donc de convertir une variation de la différence de longueur des deux bras en une différence de phase entre les deux ondes. Cette différence de phase étant elle-même transformée en une variation de luminosité après interférence qui peut être mesurée par photodétection.

Voyons cela plus en détail, en se référant à [4] et [5]. Précisons d'abord que dans le jargon de l'interférométrie, le port duquel provient le laser de l'interféromètre est généralement nommé le port symétrique et le port antisymétrique est celui qui récolte le signal après interférence au niveau de la lame séparatrice. Ceci étant dit, considérons un champ électrique monochromatique mis sous forme complexe et se propageant selon une certaine direction z

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \mathbf{e}^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (1.1)$$

où E_0, ϵ, k_0 et ω_0 sont respectivement l'amplitude complexe, le vecteur polarisation, le nombre d'onde et la pulsation du champ électrique. Le champ électrique réel provenant du laser est obtenu en prenant la partie réelle de \mathbf{E} .

Le premier composant optique que rencontre le laser est la lame séparatrice. En passant par celle-ci, l'amplitude complexe E_0 est divisée en une partie réfléchie et une partie transmise. Cette lame divise la puissance du laser de manière égale si les coefficients de réflexivité et de transmissivité sont respectivement $R = T = 1/2$. Dans ce cas, les amplitudes complexes des champs se propageant vers les miroirs sont données à la sortie de la lame par

$$E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad E_2 = \frac{iE_0}{\sqrt{2}}, \quad (1.2)$$

où le facteur i tient compte du déphasage lors de la transmission. Si on note L_n et L_e , respectivement les longueurs des bras nord et est, les champs parcourent une distance $2L_n$ et $2L_e$ lors de leur aller-retour dans les bras. Au moment de se recombinaison sur la lame, ils ont ainsi chacun acquis une certaine phase, les champs étant alors

$$E_3 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{2ik_0L_n} \quad E_4 = \frac{iE_0}{\sqrt{2}} e^{2ik_0L_e}. \quad (1.3)$$

Ceux-ci repassent par la lame et on obtient, après interférence, les champs finaux

$$E_5 = \frac{E_0}{2} (e^{2ik_0L_n} - e^{2ik_0L_e}) \quad E_6 = \frac{iE_0}{2} (e^{2ik_0L_n} + e^{2ik_0L_e}). \quad (1.4)$$

Le champ E_5 est celui qui repart vers le port symétrique, il ne nous intéresse donc pas ici. Définissons les longueurs commune et différentielle des bras

$$\bar{L} = \frac{L_n + L_e}{2}, \quad \delta L = L_n - L_e \quad (1.5)$$

telles que $2L_n = 2\bar{L} + \delta L$ et $2L_e = 2\bar{L} - \delta L$. Ceci permet d'écrire

$$E_6 = \frac{iE_0}{2} e^{2ik_0\bar{L}} (e^{ik_0\delta L} + e^{-ik_0\delta L}) = iE_0 e^{2ik_0\bar{L}} \cos(k_0\delta L). \quad (1.6)$$

La puissance à la sortie du port antisymétrique est alors donnée par

$$P = |E_6|^2 = |E_0|^2 \cos^2(k_0\delta L) = |E_0|^2 \cos^2\left(\frac{2\pi\delta L}{\lambda_0}\right). \quad (1.7)$$

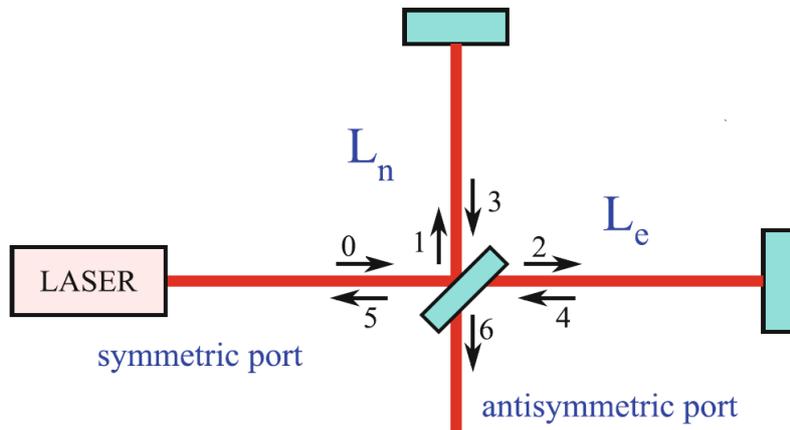


FIGURE 1.1 – Schéma d'un interféromètre Michelson [5].

On remarque bien qu'un changement dans la longueur différentielle des bras va induire un changement dans la puissance qui sera ensuite mesurée par un photodétecteur. De manière générale, le déphasage initial entre les bras est calibré afin que la puissance reçue soit nulle en l'absence de signal. On comprend alors que, par conservation de l'énergie, toute la puissance du laser repart avec E_5 au port symétrique. Nous verrons que ceci peut être exploité afin d'améliorer la précision de l'interféromètre. Voyons à présent en quoi un tel dispositif est capable de détecter une onde gravitationnelle.

1.1.2 Effet du passage d'une onde gravitationnelle

Examinons le cas spécifique où l'on veut détecter une onde gravitationnelle avec un interféromètre. Considérons une onde gravitationnelle émise par une source quelconque. Lorsque l'onde est assez éloignée de sa source, la métrique de l'espace-temps $g_{\mu\nu}$ peut être donnée par la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ à laquelle on ajoute une légère perturbation $h_{\mu\nu}$ [6]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Tout comme le potentiel électromagnétique, la forme de cette perturbation dépend du choix d'une jauge, une transformation de jauge résultant en fait d'une transformation du système de coordonnées. Considérons dans ce cas-ci ce que l'on appelle la jauge transverse de trace nulle, autrement appelée jauge TT. Sous cette jauge, si on considère une onde gravitationnelle de fréquence Ω qui se propage selon l'axe z , on peut mettre $h_{\mu\nu}$ sous la forme

$$h_{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i(\Omega t + kz)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ 0 & h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

où $k = \frac{\Omega}{c}$. On voit ici qu'une onde gravitationnelle a deux degrés de liberté et donc deux polarisations données par h_+ et h_\times qu'on nomme respectivement polarisations parallèle et croisée. Si on effectue une rotation d'un angle θ des coordonnées du plan perpendiculaire à z , les polarisations dans ce nouveau système de coordonnées seront [7]

$$h'_+ = h_+ \cos 2\theta + h_\times \sin 2\theta \quad (1.10)$$

$$h'_\times = h_\times \cos 2\theta - h_+ \sin 2\theta. \quad (1.11)$$

On remarque que les polarisations parallèle et croisée sont interverties dans le cas d'une rotation de 45° . Ceci contraste avec le cas des ondes électromagnétiques où les deux états de polarisation sont intervertis par une rotation de 90° .

La distance spatio-temporelle dans le cas du passage d'une onde gravitationnelle dans le système de coordonnées de la jauge TT est obtenu à partir de (1.9)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+(t)]dx^2 + [1 - h_+(t)]dy^2 + [1 + h_\times(t)]2dxdy + dz^2. \quad (1.12)$$

En plaçant les bras de l'interféromètre selon les axes x et y , la distance spatio-temporelle qui nous intéresse est donnée par

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [1 + h_+(t)]dx^2 + [1 - h_+(t)]dy^2. \quad (1.13)$$

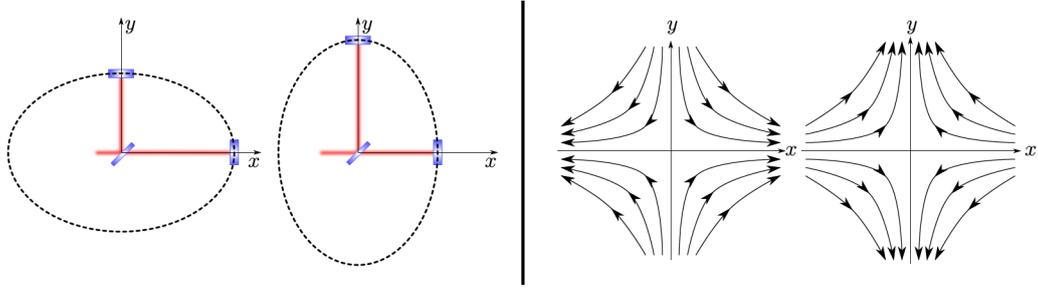


FIGURE 1.2 – A gauche, représentation de l’effet d’une onde gravitationnelle sur les bras d’un interféromètre Michelson à deux instants différents. A droite, représentation des lignes d’accélération dues à la force de marée aux mêmes instants [8].

Dans la jauge TT, les positions des miroirs de l’interféromètre sont invariantes. Par contre, les longueurs de ses bras évoluent à cause du changement de la métrique au cours du temps. A partir de là, on présente souvent l’effet d’une onde gravitationnelle sur l’interféromètre comme un changement dans la longueur différentielle des bras de l’instrument au cours du temps. En effet, l’onde gravitationnelle oscillant au cours du temps, un bras est contracté et l’autre allongé durant un certain temps et inversement une demi-longueur d’onde gravitationnelle plus tard (voir Figure 1.2). Ce va-et-vient dans la longueur des bras justifie l’appellation de force de marée souvent utilisée dans le cas des ondes gravitationnelles. Enfin, nous l’avons vu, un changement dans la longueur différentielle des bras induit une modification de la puissance mesurée par les photodétecteurs de l’instrument.

Toutefois, cette explication n’est physiquement pas très satisfaisante et cela se vérifie par le fait qu’une question émerge souvent lorsque ce développement est présenté. En effet, dans le cadre de la cosmologie, on sait que l’évolution de la métrique spatiale due à l’expansion de l’univers induit un décalage vers le rouge des ondes électromagnétiques. De manière similaire, le changement des distances induit par l’onde gravitationnelle devrait changer la longueur d’onde du laser dans un bras. Mais alors, si le laser s’étend en même temps que la cavité, comment est-ce que celui-ci peut rendre compte de son changement de longueur ? Pour élucider cela, il faut regarder de plus près le fonctionnement de l’interféromètre lorsqu’une onde gravitationnelle le traverse [9].

Imaginons la crête d’une onde électromagnétique venant du laser et qui arrive à la lame séparatrice. Au niveau de cette dernière, l’onde est séparée en deux, un extremum partant vers le bras nord et l’autre vers le bras est. Si aucune onde gravitationnelle ne traverse l’interféromètre à ce moment là, le chemin parcouru par les deux extremums sont les mêmes. Ils retournent donc sur la lame séparatrice au même moment et l’interférence est donc maximale. Considérons maintenant le cas où une onde gravitationnelle traverse l’interféromètre, les longueurs des bras ainsi que la longueur d’onde du laser ne sont plus les mêmes. Néanmoins, la vitesse de la lumière est invariante et l’altération de la métrique ne change rien au fait que les deux extremums partent en même temps de la lame séparatrice. Le changement de longueurs dans les bras implique donc que le temps de l’aller-retour n’est pas le même pour chaque extremum, et leur arrivée sur la lame séparatrice ne se produit pas au même moment. Un extremum n’arrive ainsi plus en même temps que l’autre et l’interférence des deux ondes s’en trouve modifiée ! Pour paraphraser Saulson dans son article [9] : « Peut-être vaut-il mieux dire que nous utilisons le laser comme horloge que de dire qu’on utilise sa lumière comme règle ».

Au vu de ce qui a été dit ci-dessus, nous allons présenter un développement qui tient compte du temps de parcours du laser dans chaque bras [10]. Dans le cas d’une onde lumineuse, la distance spatio-temporelle est nulle, $ds = 0$, et donc vu (1.13), on a

$$c^2 dt^2 = [1 + h_+(t)] dx^2 + [1 - h_+(t)] dy^2. \quad (1.14)$$

En considérant le bras dirigé selon l'axe x , l'équation précédente donne alors

$$c \left| \frac{dt}{dx} \right| = \sqrt{1 + h_+(t)} \approx 1 + \frac{1}{2} h_+(t) \equiv 1 + \frac{1}{2} h_+ e^{-i\Omega t} \quad (1.15)$$

où on s'est autorisé une approximation à la deuxième égalité car l'amplitude d'une onde gravitationnelle est extrêmement faible comparée à l'unité. Le temps de parcours du laser sortant de la lame en $t = 0$ dans ce bras est alors donné par

$$t_x = \int_0^L \left| \frac{dt}{dx} \right| dx - \int_L^0 \left| \frac{dt}{dx} \right| dx. \quad (1.16)$$

Le signe négatif dans le second membre tient compte du fait qu'au retour, la vitesse du laser est dans l'autre sens. En notant $T \equiv L/c$, le temps de l'aller dans le bras, on a

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{-i\Omega x/c} \right) dx - \frac{1}{c} \int_L^0 \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{-i\Omega(T-x/c)} \right) dx \\ &= \frac{2L}{c} + \frac{h_+}{2i\Omega} (1 - e^{-2i\Omega T}) \\ &= \frac{2L}{c} + \frac{h_+ L}{c} e^{-i\Omega T} \frac{\sin \Omega T}{\Omega T}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pour le bras dirigé selon l'axe y , l'expression du temps de parcours du laser, noté t_y , ne diffère que d'un signe négatif sur l'amplitude de l'onde gravitationnelle. La différence de temps de parcours entre les deux signaux partis en même temps de la lame séparatrice est

$$\Delta t = t_x - t_y = \frac{2h_+ L}{c} e^{-i\Omega T} \frac{\sin \Omega T}{\Omega T}. \quad (1.18)$$

La différence de phase est ainsi donnée par

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \omega_0 \Delta t = ck_0 \Delta t \\ &= 2k_0 h_+ L e^{-i\Omega T} \frac{\sin \Omega T}{\Omega T}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

où ω_0 et k_0 sont respectivement la fréquence et le nombre d'onde du laser. Le déphasage mesuré est donné par la partie réelle de cette dernière expression. On voit bien que, en l'absence d'onde gravitationnelle, ce déphasage sera nul tandis qu'une onde traversant l'interféromètre va imprimer un déphasage, lié à son amplitude h_+ . Précisons qu'il existe une autre façon d'expliquer l'interaction entre une onde gravitationnelle et un interféromètre. Celle-ci consiste à directement regarder la conséquence du changement de la métrique de l'espace-temps, dû à l'onde gravitationnelle, sur l'onde électromagnétique se propageant dans l'interféromètre. Comme le disent Blandford et Thorne dans [11], la différence entre ces deux méthodes est similaire à celle entre les points de vue d'Heisenberg et de Schrödinger en mécanique quantique. Ce sont deux formalismes différents qui rendent au final les mêmes effets physiques. La seconde méthode demande cependant de traiter le champ électromagnétique dans un espace courbe, l'attirail physique et mathématique est donc plus élaboré. Un tel développement peut être trouvé dans [10].

1.2 L'interférométrie à ondes gravitationnelles

La toute première onde gravitationnelle détectée en 2015 avait une amplitude maximale $h = 1.0 \times 10^{-21}$ [1]. Ceci est évidemment très faible et un simple interféromètre Michelson est bien incapable de mesurer un tel phénomène. Il a donc fallu améliorer quelque peu la configuration de base. Nous verrons dans cette section quelles ont été les améliorations majeures qui ont permis de détecter la première onde gravitationnelle ainsi que les différentes sources de bruit et comment on peut les gérer.

1.2.1 Améliorations de l'interféromètre Michelson

On remarque, à partir de (1.7), qu'une façon directe, quoique vite coûteuse, d'améliorer la précision d'un interféromètre est d'augmenter la longueur des bras. Ainsi, les interféromètres Virgo et LIGO ont des bras d'une longueur respective de 3 et 4 kilomètres. Le déplacement relatif des miroirs est alors de l'ordre de $\delta L \approx 10^{-18} \text{m}$, ce qui est approximativement le millième de la taille d'un proton ! Une autre méthode pour augmenter artificiellement la longueur des bras est de placer un miroir au début de chacune des cavités, juste après la lame séparatrice (voir Figure 1.3). On crée ainsi ce que l'on appelle des cavités Fabry-Perot. L'onde électromagnétique entrant dans cette cavité est réfléchiée en moyenne plusieurs centaines de fois entre les deux miroirs, allongeant ainsi substantiellement le parcours effectué par l'onde dans un bras. Afin de maximiser le nombre d'aller-retours, les miroirs utilisés ont un coefficient de réflexivité très proche de 1, on obtient ce qu'on appelle une cavité Fabry-Perot de haute finesse.

Enfin, nous avons précisé ci-dessus que la puissance lumineuse circulant dans l'interféromètre revient au port symétrique avec le champ E_5 . Or vu (1.7), un autre moyen d'améliorer la précision de l'interféromètre est d'augmenter la puissance $|E_0|^2$ du faisceau arrivant sur la lame séparatrice. Plutôt que de laisser E_5 partir vers le port symétrique, on rajoute alors un miroir, que l'on nomme recycleur de puissance, afin de renvoyer ce champ vers la lame séparatrice. Ce sont ces modifications majeures qui ont permis la détection de la toute première onde gravitationnelle. Ce n'est bien sûr pas tout et des descriptions plus détaillées de LIGO et Virgo peuvent être trouvées dans [12, 13].

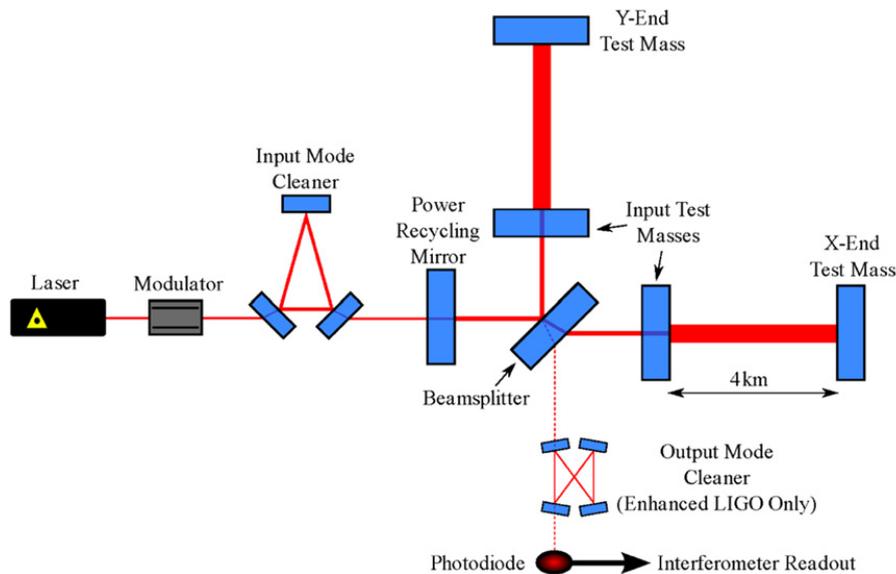


FIGURE 1.3 – Configuration de l'interféromètre LIGO lors de sa sixième phase de fonctionnement [14].

1.2.2 Sources de bruit dans un interféromètre

Dans cette section, nous allons décrire les différentes sources de bruit qui peuvent apparaître de manière générale dans un interféromètre Michelson (voir Figure 1.4). Pour le lecteur intéressé, on peut trouver dans [14] une description des bruits spécifiques qui sont apparus durant la sixième phase de fonctionnement de LIGO. Le but ici n'est pas de fournir une description exhaustive de ceux-ci mais de se donner une idée des autres bruits qui peuvent exister en dehors du bruit qui nous intéressera par la suite, le bruit quantique. L'origine et les conséquences de ce dernier seront plus longuement explicitées au quatrième chapitre.

Afin de quantifier les bruits d'un interféromètre, on étudie leur impact sur la sensibilité du détecteur. Cette sensibilité, souvent notée $h(\Omega)$, est définie comme l'amplitude minimale d'une onde gravitationnelle de fréquence Ω que l'interféromètre est capable de détecter. Nous verrons, dans le cas du bruit quantique, comment cette quantité peut être déterminée.

Bruit sismique

Le but d'un interféromètre est de déterminer avec précision la longueur de ses bras. Le plus souvent, c'est au travers d'une perturbation dans la position des miroirs qu'un bruit va imprégner une mesure. C'est le cas du bruit dit sismique. Celui-ci constitue l'ensemble des vibrations du sol qui vont se transmettre aux miroirs à travers la structure de l'interféromètre. Il est à la fois d'origine naturelle et humaine, à travers le passage de camions, de travaux de construction proches, etc. Ces vibrations diminuent fortement à haute fréquence où le bruit sismique devient négligeable. Cependant, ce bruit limite fortement les mesures à basses fréquences, autour de quelques Hertz. C'est la raison principale à la mise en place du projet LISA. Celui-ci consiste en l'envoi de plusieurs satellites afin de former un interféromètre dans l'espace [15].

Afin de réduire ce bruit sur Terre, on suspend les miroirs à des fils afin d'obtenir une succession de pendules. Ceci permet de fortement réduire la réponse aux vibrations de fréquences supérieures à la fréquence naturelle du dispositif [7]. De plus, on utilise des miroirs ayant une masse élevée afin qu'ils aient une inertie importante. A cela, on ajoute des systèmes de suspen-

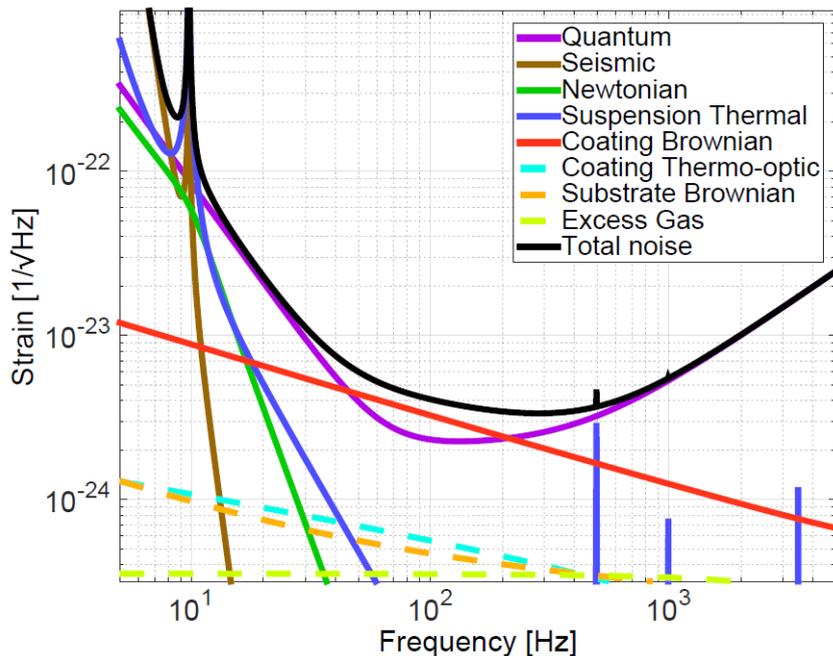


FIGURE 1.4 – Sensibilité (*strain* en anglais) de Advanced LIGO à une puissance laser de 125 W. Chaque courbe représente l'amplitude d'une certaine source de bruit selon la fréquence du signal [16].

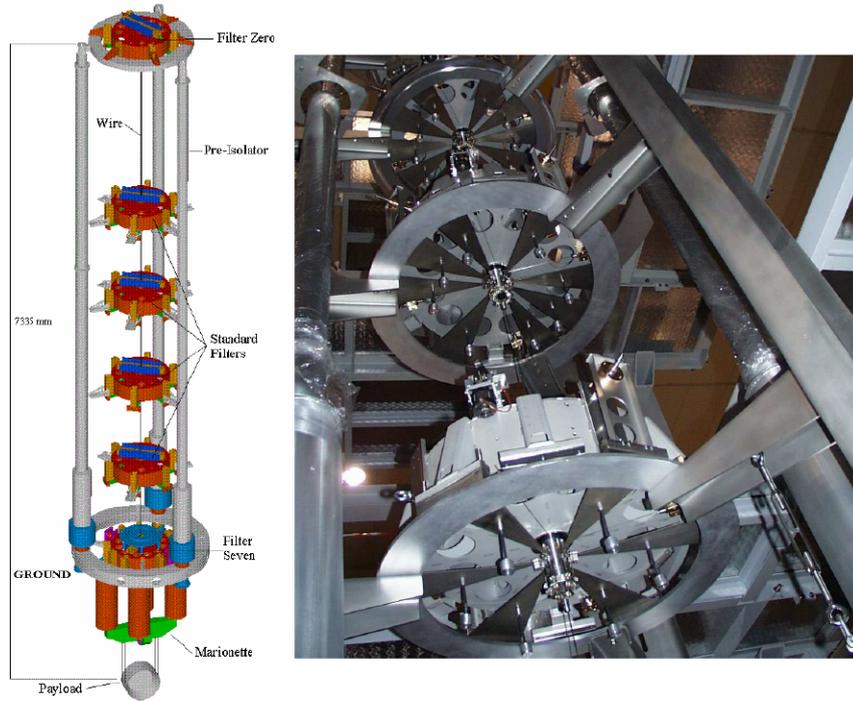


FIGURE 1.5 – Le Superatténuateur de l'interféromètre Virgo [17].

sion, le but étant de réduire les vibrations sur un maximum de degrés de liberté. Les détecteurs LIGO utilisent une suspension active, des senseurs déterminent en continu le déplacement et l'accélération des miroirs dus au bruit sismique. Un ensemble d'actuateurs hydrauliques et électromagnétiques suppriment ensuite ces déplacements [18]. Le détecteur Virgo utilise quant à lui une suspension passive [19]. Une chaîne de filtres mécaniques composée d'une suite de pendule et d'atténuateurs permet de réduire les vibrations avant qu'elles n'atteignent le miroir, voir Figure 1.5.

Gradient de gravité

Le gradient de gravité, aussi appelé bruit newtonien, est formé par l'ensemble des variations de gravité dans l'environnement de l'interféromètre. Ce bruit provient de l'interaction directe entre les miroirs et les mouvements des masses aux alentours, un système de suspension n'est donc d'aucune utilité ici. Les ondes sismiques et les variations de pression et de température de l'atmosphère sont les principales causes de ce bruit. Il n'est significatif qu'à faible fréquence et est très souvent associé avec le bruit sismique.

Pour lutter contre le bruit newtonien, il est prévu de placer des séismomètres et des microphones afin qu'à partir de leurs mesures, on puisse modéliser les fluctuations de gravité aux alentours de l'interféromètre. Il est alors possible de retirer ce bruit du signal mesuré. A côté de ça, des études sont effectuées afin de trouver des emplacements pour les futurs interféromètres où les bruits sismique et newtonien sont réduits. Cela passe aussi par la mise sous terre de ces détecteurs, les télescopes Einstein et KAGRA devraient être enfouis à une centaine de mètres, là où ces deux bruits sont affaiblis. Une introduction exhaustive au bruit dû à un gradient de gravité peut être trouvée dans [20].

Bruit thermique

Sous le nom de bruit thermique se cache plusieurs phénomènes liés à la température et aux gradients de température présents dans les éléments de l'interféromètre. En effet, une partie de

la puissance du laser est absorbée par les miroirs, en dépit de leur haute qualité, entraînant leur échauffement. Les gradients de température ainsi créés induisent, entre autres, des tensions dans les miroirs et des modifications locales dans l'indice de réfraction [21]. Tout ceci change la façon dont l'onde électromagnétique réagit sur le miroir et crée ce que l'on appelle des aberrations dans le faisceau laser. De plus, la température du miroir va influencer sur le mouvement brownien de ses molécules, ce mouvement entraînant un changement dans la longueur des bras. Cela peut paraître négligeable mais vu les niveaux de précision nécessaires, le bruit thermique est actuellement le bruit limitant les mesures autour de 100 Hz.

Une méthode directe qui peut être mise en place afin de réduire le mouvement brownien est d'introduire un système de refroidissement qui permettrait de baisser la température des miroirs à 10 K. Cependant, à une telle température, le rayonnement du corps noir ne suffit plus à évacuer la chaleur déposée par le laser [17]. Une solution est d'augmenter la section des fils soutenant les miroirs afin d'évacuer la chaleur par ceux-ci mais il ne faut pas que cela se fasse au détriment d'une augmentation du bruit sismique. Nous voyons donc ici qu'une réduction d'une source de bruit peut entraîner l'augmentation d'une autre, d'où l'importance d'aussi considérer l'interféromètre dans son ensemble et non composante par composante ! Pour terminer sur le bruit thermique, afin d'atténuer les gradients de température, les télescopes Virgo et LIGO ont mis en place des lasers à CO₂ afin de chauffer le bord des miroirs et ainsi réduire la différence de température avec la partie centrale de ceux-ci [22]. De même, d'autres matériaux peuvent être utilisés pour les miroirs afin de réduire l'absorption de photons [23] ou encore utiliser d'autres géométries du champ laser qui permettraient une augmentation de température plus uniforme [21].

Bruit quantique

Le bruit quantique est composé de deux bruits différents mais qui ont la même origine. Le premier bruit quantique est appelé bruit de pression de radiation et provient des fluctuations de la pression de radiation s'exerçant sur les miroirs de l'interféromètre. Leurs positions changent ainsi de manière aléatoire et le trajet du champ électromagnétique dans chaque bras s'en trouve donc modifié. Le second est appelé bruit de grenaille et trouve son origine dans l'irrégularité de l'arrivée des photons sur un photodétecteur. Ceci induit une variation dans l'intensité mesurée, alors même que, comme nous l'avons vu, c'est une telle variation qui devrait trahir la présence d'une onde gravitationnelle.

Les fluctuations dans la pression de radiation et l'irrégularité de l'arrivée des photons résultent tous deux de la nature profondément probabiliste de la mécanique quantique, d'où le nom de bruit quantique. Ce bruit ayant une origine liée aux sciences physiques, nous allons le présenter dans la suite de manière plus approfondie. Nous calculerons l'ampleur de ce bruit sur la précision de mesure et nous verrons que bruit de pression de radiation et bruit de grenaille ne se comportent pas de la même manière par rapport à l'intensité lumineuse et la fréquence de l'onde gravitationnelle. De plus, ils induisent ensemble ce que l'on appelle la limite quantique standard qui est une limite générale à la précision de mesure d'une variable physique. Dans le cadre de l'interférométrie, nous expliciterons plusieurs techniques permettant de dépasser cette limite qui sont actuellement à l'étude ou implémentées dans les interféromètres existants.

La réduction du bruit quantique est cruciale pour l'amélioration des futurs interféromètres. En effet, des avancées substantielles sont attendues quant au bruit thermique. Nous pouvons donc voir sur la Figure 1.4 que le bruit quantique sera le bruit limitant sur une très large gamme de fréquences. Celui-ci empêchera ainsi la détection d'ondes gravitationnelles d'amplitudes moindres et réduira le nombre d'évènements détectés, ralentissant du même coup la collecte de données liées à l'astronomie par onde gravitationnelle.

Chapitre 2

Les sources d'ondes gravitationnelles

Avant de passer dans le monde quantique, il semble important de motiver la détection des ondes gravitationnelles et donc la raison de ce mémoire. En plus de confirmer l'une des prédictions majeures de la relativité générale d'Einstein, ces ondes permettent d'étudier un grand ensemble de phénomènes difficilement accessibles à l'aide du rayonnement électromagnétique. De plus, avec l'essor actuel de l'astronomie par neutrinos, un même évènement pourra être étudié tout à la fois à l'aide des ondes électromagnétiques et gravitationnelles, des neutrinos et des rayonnements cosmiques [24]. Chacun de ces messagers apportant des informations différentes, on s'attend à pouvoir étudier les nombreux phénomènes prenant place dans l'univers sous toutes leurs coutures. Ainsi, des informations inédites seront glanées qui seront utiles tant pour la physique fondamentale que pour l'astrophysique et la cosmologie.

La première preuve expérimentale de l'existence des ondes gravitationnelles est due à Russel Hulse et Joseph Taylor en 1975 [25]. Cette découverte résulte de l'étude du système PSR B1913+16 constitué d'un pulsar et d'une étoile à neutron en rotation l'un autour de l'autre. La théorie de la relativité générale prédit que dans un tel cas, le système émet des ondes gravitationnelles et perd donc de l'énergie au fil du temps, cette perte devant résulter en une diminution de la période de l'orbite du système. C'est effectivement ce qui a été observé et, de plus, on constate un excellent accord avec la théorie post-newtonienne des ondes gravitationnelles.

Cette première découverte a conforté la communauté scientifique quant à l'importance de la recherche d'une détection directe d'ondes gravitationnelles, pour le résultat que l'on connaît aujourd'hui ! Il y a cependant une importante différence entre la découverte de Hulse et Taylor et les détections actuelles. Le système PSR B1913+16 est dans des conditions de champ gravitationnel et de vitesse faibles tandis que les systèmes découverts récemment sont dans des conditions de champ fort et à vitesse élevée. Ces derniers sont ainsi de véritables laboratoires naturels permettant de tester la relativité générale dans des conditions extrêmes. De plus, précisons que l'hypothétique matière noire interagit très peu avec le champ électromagnétique alors qu'elle représente 27% de la masse de l'univers. Les ondes gravitationnelles seront donc très probablement une source d'informations quant à toute cette partie de l'univers.

La forme et la fréquence d'une onde gravitationnelle dépend très fortement du système physique produisant l'onde, ce que l'on appelle la source. Typiquement, pour un corps massif seul, la fréquence d'une onde gravitationnelle générée par celui-ci sera proportionnelle à sa fréquence propre donnée par [7]

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} \sim \sqrt{G\bar{\rho}/4\pi} \quad (2.1)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne du corps. La quantité Ω est la pulsation de l'onde, par abus de langage (que l'on adopte pour la suite) on parle souvent de Ω comme étant la fréquence de l'onde gravitationnelle. De manière générale, on a

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (2.2)$$

où M et R sont la masse et le rayon caractéristique de la source. Par exemple, pour une étoile à neutron, on peut avoir $M = 2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1,4 M_{\odot}$ (M_{\odot} correspond à une masse solaire) et $R = 10 \text{ km}$, ce qui donne $\Omega = 2\pi \times 300 \text{ Hz}$. Pour un trou noir stellaire, on peut avoir $M = 10 M_{\odot}$ et $R = 30 \text{ km}$, ce qui donne $\Omega = 2\pi \times 160 \text{ Hz}$. Pour des trous noirs supermassifs, on peut descendre autour de l'ordre du mHz. La fréquence des sources est importante pour la détection car chaque détecteur n'est pas sensible à toutes les fréquences de la même manière. L'interféromètre Virgo serait ainsi bien incapable de détecter une onde d'une fréquence de quelques mHz alors que nous avons vu que LISA, qui devrait être opérationnel en 2034, est spécialement conçu pour des détections à faibles fréquences.

Dans ce chapitre, nous allons expliciter quelque peu les différentes informations que l'on peut tirer de la détection d'une onde gravitationnelle. Autrement dit, à quoi sert une telle détection ? Nous nous concentrerons principalement sur les résultats possibles au niveau de la physique fondamentale. Notons qu'une certaine source d'ondes gravitationnelles ne permet pas d'obtenir les mêmes informations qu'une autre. Nous nous concentrerons principalement sur le seul type de sources d'ondes gravitationnelles observées jusqu'à aujourd'hui. Toutefois, nous donnerons aussi un exemple de source probable afin de montrer plus largement la diversité des informations qu'une onde gravitationnelle peut apporter.

2.1 Pourquoi vouloir détecter des ondes gravitationnelles ?

Comme annoncé, voyons quels sont les résultats expérimentaux qui peuvent être extraits de la détection d'une onde gravitationnelle venant d'une certaine source. Cette introduction ne sera pas exhaustive, nous renvoyons donc le lecteur à la littérature pour plus d'informations, par exemple [7, 17, 26-32]. Notons au passage que, contrairement aux ondes électromagnétiques qui peuvent être générées par un moment dipolaire oscillant de charges positives et négatives, la conservation de la quantité de mouvement implique qu'une onde gravitationnelle n'est générée qu'à partir d'un moment quadrupolaire [7]. Il ne faut donc pas s'attendre à avoir une génération d'ondes gravitationnelles à partir d'un mouvement de masses à symétrie sphérique, par exemple.

2.1.1 La coalescence d'un système binaire

Toutes les détections d'ondes gravitationnelles qui ont été possibles jusqu'à présent proviennent de la coalescence de deux corps massifs. A cette heure, 11 détections ont été publiées depuis 2015¹, une description de toutes celles-ci étant donnée dans [33]. Lors d'une coalescence, les deux corps impliqués peuvent principalement être soit des trous noirs, soit des étoiles à neutrons, la majorité des fusions sont donc entre deux trous noirs, entre deux étoiles à neutron et entre trou noir et étoile à neutron.

Ce type d'évènements est généralement séparé en trois phases : la phase de rotation, la fusion et l'amortissement (voir Figure 2.1). Dans la première phase de rotation, qui peut durer plusieurs millions d'années, les deux corps orbitent l'un autour de l'autre. Ce mouvement de masse génère des ondes gravitationnelles, le système perd ainsi de l'énergie et la période et le rayon de l'orbite diminuent au fil du temps. Dans cette phase, les méthodes d'approximations post-newtoniennes sont valables car le champ de gravitation n'est pas encore trop puissant. Ces

1. Le 1^{er} avril 2019, les interféromètres LIGO et Virgo, avec une configuration améliorée, ont commencé une nouvelle phase d'observation. A ce jour, le 29 mai, 9 nouvelles coalescences de trous noirs et 3 d'étoiles à neutrons ont été détectées au minimum (la nature de certaines détections n'est pas sûre). Ceci semble confirmer les modèles prédisant l'observation d'au moins une coalescence de trous noirs par semaine et une coalescence d'étoiles à neutrons par mois dans le cas de cette campagne qui devrait durer un an. De plus, un candidat pour une coalescence d'un trou noir et d'une étoile à neutron a été enregistré. Une base de données publique regroupant ces nouvelles observations et les prochaines est disponible à l'adresse <https://gracedb.ligo.org/>.

méthodes consistent en un développement en série en puissance de v/c , v étant la vitesse des corps et c la vitesse de la lumière dans le vide. Ceci permet de calculer les corrections relativistes à la loi de gravitation de Newton et d'obtenir des solutions analytiques pour la forme des ondes générées par un système binaire [34]. A partir d'un calcul quasi-newtonien, on peut déjà déterminer une approximation de la fréquence et de l'amplitude d'une onde gravitationnelle générée dans un système binaire [26]

$$f(t) = \frac{1}{8\pi} 5^{3/8} \left(\frac{c^3}{GM_{chirp}} \right)^{5/8} \frac{1}{(t_f - t)^{3/8}} \quad (2.3)$$

$$h(t) = \frac{1}{r(t)} \left(\frac{5G^2 M_{chirp}^5}{c^{11}} \right)^{1/4} \frac{1}{(t_f - t)^{1/4}} \quad (2.4)$$

où G est la constante gravitationnelle, t_f le temps au moment de la fusion et $r(t)$ la distance entre les deux corps. De plus, on a le paramètre

$$M_{chirp} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}} \quad (2.5)$$

où M_1 et M_2 sont les masses de chaque corps. On remarque que la fréquence augmente au cours du temps et l'amplitude de l'onde augmente au fur et à mesure que l'orbite se contracte, ce qui est bien le comportement observé. Toutefois, cette formule ne permet pas de séparer les masses de chaque corps mais un développement à des ordres supérieurs permet d'obtenir plus d'informations sur les paramètres de cette phase, dont M_1 et M_2 séparément. Remarquons que

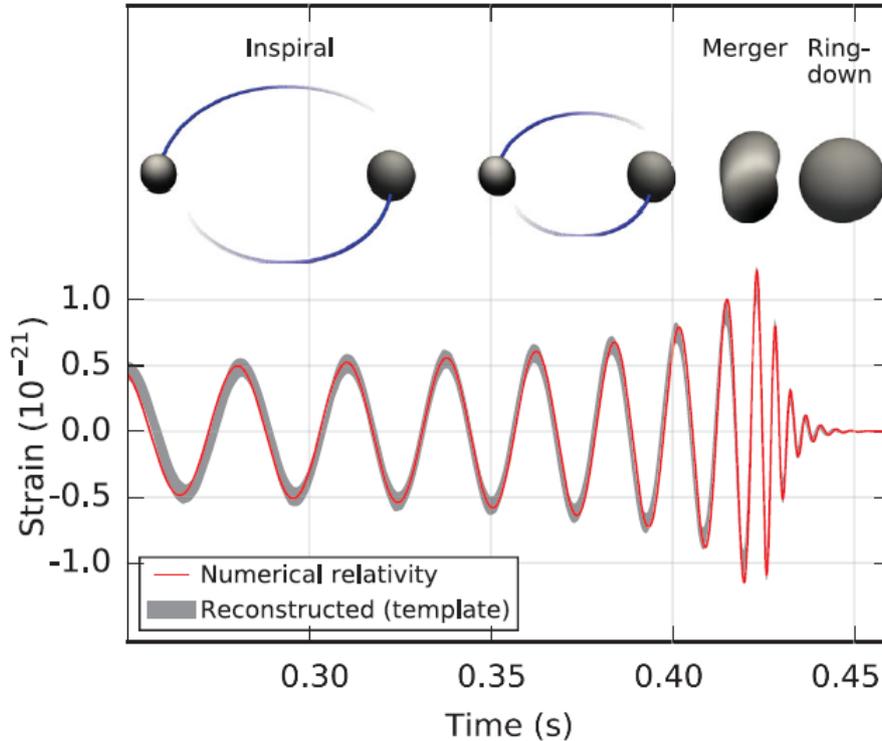


FIGURE 2.1 – Forme du signal d'une onde gravitationnelle provenant de la coalescence de deux trous noirs, obtenue à l'aide de modélisations numériques. On remarque l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude de l'onde au cours du temps jusqu'à la phase de fusion. Le phénomène atteint alors son intensité maximale et le système se stabilise ensuite durant la phase d'amortissement [1].

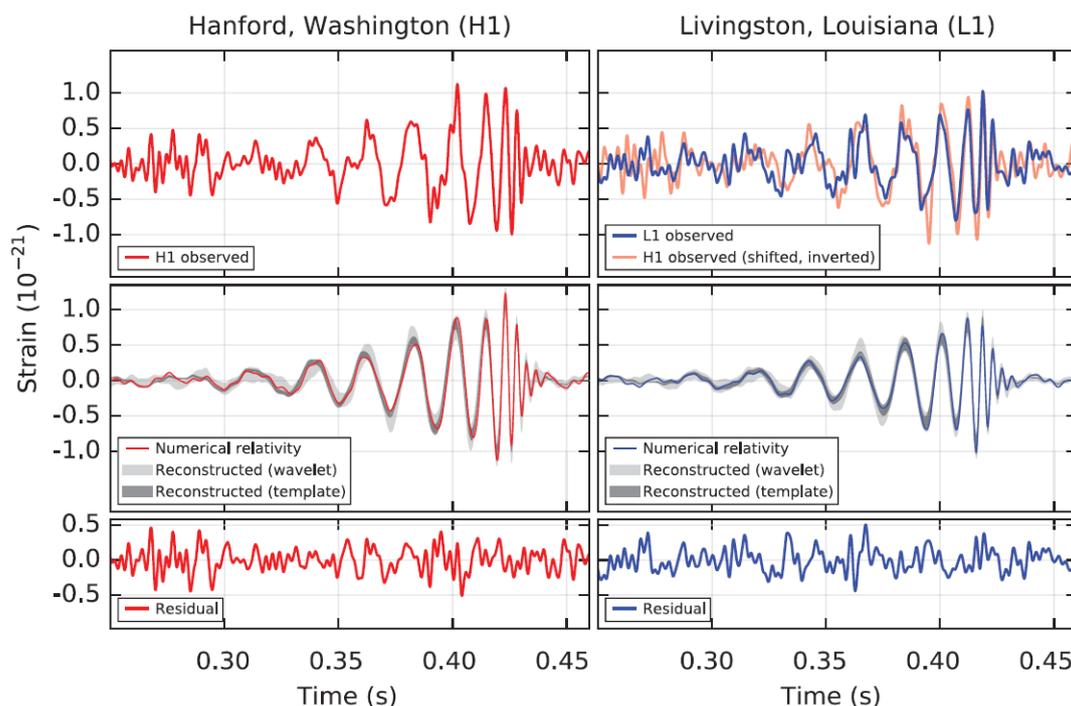


FIGURE 2.2 – Au dessus, le signal observé par les détecteurs LIGO d’Hanford et de Livingstone lors de l’évènement GW150914. L’onde passe en 0,2 s de 35 Hz à 150 Hz, atteignant alors son amplitude maximale. Au milieu, on fait correspondre au mieux le signal avec une onde gravitationnelle modélisée numériquement à partir des équations d’Einstein dans le vide. En dessous, on représente la différence entre le signal et l’onde modélisée [1].

l’augmentation de la fréquence au cours du temps, reliée au fait que ces fréquences se trouvent dans le spectre sonore, ont donné le nom de gazouillement (*chirp* en anglais) au signal résultant de ces coalescences.

La phase de rotation se termine par la fusion de chacun des corps, l’amplitude et la fréquence des ondes gravitationnelles émises étant alors maximales. Des effets relativistes très importants sont présents lors de cette deuxième phase et les approximations post-newtoniennes ne suffisent plus. Des méthodes de modélisation numérique ont donc été développées afin de pouvoir déterminer les paramètres lors de cette phase (ainsi que lors des deux autres) en faisant correspondre le signal obtenu et un modèle numérique d’onde gravitationnelle. On peut voir cela sur la Figure 2.2 dans le cas de la toute première détection d’onde gravitationnelle GW150914².

Enfin, dans la phase d’amortissement (*ringdown* en anglais), les asymétries résultantes de la fusion continuent de générer des ondes gravitationnelles. Le système perd ainsi de l’énergie jusqu’à se stabiliser dans sa forme finale. Les champs gravifiques sont moins importants que lors de la fusion et des méthodes analytiques sont ainsi réutilisables afin de déterminer les paramètres de cette phase.

Voyons quelques exemples de tests expérimentaux réalisables et réalisés à partir de tels évènements. Les principaux résultats actuels sont des tests de la relativité générale que l’on peut retrouver dans [28,29]. Ceux-ci permettent de vérifier si la relativité générale est toujours d’application dans le cas des champs gravitationnels forts présents dans les coalescences. Brisons le suspens, jusqu’à présent aucune mesure n’est en désaccord avec les prédictions de la théorie de la gravitation d’Einstein. Cependant, les contraintes imposées aux théories alternatives à la

2. La détection d’onde gravitationnelle est nommée comme suit. D’abord GW pour signifier l’objet observé, dans notre cas une onde gravitationnelle (*gravitational wave* en anglais). Ensuite, on précise l’année, le mois et le jour. L’évènement GW150914 est donc la détection d’une onde gravitationnelle le 14 septembre 2015.

relativité générale ont déjà permis de mettre certaines d'entre elles en grande difficulté. Enfin, la coalescence de corps massifs peut aussi nous apporter des informations utiles dans le cas de l'astrophysique ou de la cosmologie.

Propriétés d'une onde gravitationnelle

La relativité générale impose certaines contraintes aux ondes gravitationnelles. Elle prédit ainsi que ces ondes sont dotées de deux états de polarisation distincts et se propagent à la même vitesse que la lumière. Ceci n'est pas trivial, d'autres théories de la gravitation prédisent par exemple des polarisations supplémentaires ainsi qu'une vitesse en deça de celle de la lumière. La détection d'ondes gravitationnelles par coalescence est une méthode qui permet naturellement l'étude de ces propriétés en imposant des limites expérimentales sur celles-ci.

Commençons par les états de polarisation d'une onde gravitationnelle. L'existence, par exemple, d'un graviton qui serait massif impliquerait non seulement les deux états de polarisation d'hélicités ± 2 de la relativité générale mais aussi trois autres états d'hélicités ± 1 et 0 [32]. Expérimentalement, ces polarisations n'induisent pas les mêmes effets sur un interféromètre à ondes gravitationnelles. En toute généralité, le signal d'un détecteur sera donné par

$$h(t) = \sum_A F^A h_A(t) \quad (2.6)$$

où $h_A(t)$ est l'amplitude de l'onde gravitationnelle dans l'état de polarisation A et F^A est la fonction déterminant la réponse du détecteur à l'état de polarisation A . En comparant la réponse de différents interféromètres à une onde gravitationnelle, il est possible à l'aide d'une observation de déterminer l'état général de polarisation de cette onde. On peut ainsi déterminer si oui ou non d'autres états que ceux prédit par la relativité générale existent. Cependant, afin de bien différencier les différentes polarisations, il est nécessaire d'avoir plusieurs interféromètres d'orientations différentes opérationnels en même temps. Les mesures effectuées à l'aide des coalescences de trous noirs semblent indiquer une préférence pour la seule existence des états d'hélicités ± 2 , conformément à la relativité générale, bien que celles-ci ne permettent pas encore de conclure définitivement [28].

Enfin, intéressons-nous à la vitesse de propagation des ondes gravitationnelles. La détection d'une coalescence de deux étoiles à neutrons est un événement tout indiqué pour déterminer cette vitesse. En effet, un tel phénomène émet à la fois des ondes gravitationnelles et des ondes électromagnétiques, ce qui n'est pas le cas lors d'une coalescence de trous noirs. A l'aide de ces deux émissions et de leur différence d'arrivée sur Terre, il est possible de comparer la vitesse de propagation des ondes lumineuse et gravitationnelle.

L'évènement GW170817 a été confirmé comme étant une telle coalescence d'étoiles à neutrons, cette détection ayant été suivie de l'observation d'un sursaut gamma en un temps $\Delta t = (+1,7 \pm 0,05)$ secondes plus tard [35]. En notant $\Delta v = v_{gw} - c$ la différence de vitesse entre onde gravitationnelle et onde lumineuse et en considérant que le pic d'intensité de l'onde gravitationnelle coïncide avec l'émission des premiers photons, il est possible à partir de Δt de poser une limite supérieure à Δv . Enfin, si on considère que le sursaut gamma a été émis 10 s après l'intensité maximale de l'onde gravitationnelle, on peut obtenir une limite inférieure à Δv . Ces deux limites ont été déterminées dans le cas de GW170817, on a obtenu [35]

$$-2 \times 10^{-15} \leq \frac{\Delta v}{c} \leq 4 \times 10^{-16}. \quad (2.7)$$

Pour l'instant, la principale incertitude liée à cette mesure est le temps auquel est émis le sursaut gamma par rapport à l'onde gravitationnelle. Dans notre cas, on a pris 10 s mais d'autres scénarios peuvent donner des temps entre -100 et 1000 secondes. Heureusement, d'autres détections permettraient de mieux déterminer cette différence de temps d'émissions et donc de contraindre plus précisément Δv .

Test du principe d'équivalence

Le principe d'équivalence, qui est à la base de la théorie de la relativité générale, implique que tout objet réagit exactement de la même manière aux variations de la métrique de l'espace-temps. En utilisant l'effet Shapiro dans le cas d'une double génération d'ondes gravitationnelle et électromagnétique lors d'une coalescence, il est possible de vérifier si ces deux champs réagissent de la même manière aux potentiels gravifiques qu'ils vont croiser durant leur propagation dans l'espace. En effet, sous l'effet d'un potentiel gravitationnel $\phi(\mathbf{r})$, la dilatation du temps va induire un délai dans le parcours d'une onde qui sera donné par [35]

$$\delta t = -\frac{1-\gamma}{c^3} \int_{\mathbf{r}_e}^{\mathbf{r}_o} \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.8)$$

où l'on intègre sur tout le chemin de l'onde, depuis la position de l'émission \mathbf{r}_e à la position de l'observation \mathbf{r}_o . Le paramètre γ permet de déterminer l'influence d'un potentiel gravifique sur l'onde qui se propage. Dans le cas de la relativité générale, ce paramètre est égal à l'unité pour une onde gravitationnelle ou une onde électromagnétique, autrement dit $\gamma_{GW} = \gamma_{EM} = 1$. Des mesures de la sonde Cassini passant près du soleil ont permis d'avoir pour les ondes électromagnétiques [36]

$$\gamma_{EM} = 1 + (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}. \quad (2.9)$$

A nouveau, en comparant la différence de temps d'arrivée entre onde gravitationnelle et onde électromagnétique et en utilisant les mêmes différences de temps d'émission qui ont permis d'obtenir (2.7), l'évènement GW170817 donne les contraintes suivantes [35]

$$-2,6 \times 10^{-7} \leq \gamma_{GW} - \gamma_{EM} \leq 1,2 \times 10^{-6}. \quad (2.10)$$

Aucune déviation significative à la relativité générale n'est donc observée. Par contre, certains modèles comme TeVeS introduits afin d'expliquer la matière noire et qui font partie des théories plus générales découlant de MOND (*Modified Newtonian Dynamics*) ont été mises hors jeu par cette mesure de $\gamma_{GW} - \gamma_{EM}$. En effet, dans ces modèles, les ondes gravitationnelle et électromagnétique ne se couplent pas aux mêmes métriques. Une onde gravitationnelle suit ainsi la métrique déterminée par la matière baryonique alors qu'une onde électromagnétique suit la métrique déterminée à la fois par la matière baryonique mais aussi par la matière noire. Le délai subi par la lumière doit donc être bien plus important que celui subi par l'onde gravitationnelle. Il a ainsi été déterminé que dans le cas de GW170817, la lumière aurait dû mettre 400 ± 90 jours de plus pour arriver sur Terre que l'onde gravitationnelle [37]. Clairement, même en considérant les différences de temps d'émission les plus élevées, ces modèles ne sont plus viables.

Nature d'un trou noir

La coalescence d'un système binaire permet d'étudier les trous noirs d'une façon inédite. Précisons-le, l'évènement GW150914 est la première détection directe d'un trou noir et est donc la première expérience confirmant définitivement l'existence de ces objets! Le principal théorème permettant de contraindre la nature d'un trou noir est le théorème d'unicité. Celui-ci stipule que les seuls trous noirs existant sont les trous noirs de Kerr qui sont décrits par la métrique du même nom. Dans ce cas, le trou noir est complètement déterminé par sa masse et son moment cinétique. Toutefois, plusieurs hypothèses doivent être considérées pour obtenir ce théorème et l'observation d'ondes gravitationnelles pourrait donc apporter des résultats inattendus [17].

Une façon de vérifier ce théorème est d'étudier ce que l'on appelle les modes quasi-normaux (*quasi-normal modes* en anglais, abrégé en QNM) de la phase d'amortissement d'une coalescence. En effet, après la fusion de deux trous noirs, de fortes asymétries existent toujours dans

le corps final et des ondes gravitationnelles sont donc émises. Dans le cas des trous noirs de Kerr, ces ondes sont émises dans certains modes uniquement déterminés par les masses et les moments cinétiques des trous noirs initiaux. Chacun de ces modes est paramétré par trois nombres entiers (n, l, m) , le mode fondamental d'un trou noir de Kerr étant celui pour lequel $n = 0$ et $l = m = 2$. Pour ce mode particulier, l'amplitude de l'onde gravitationnelle dans l'état de polarisation h_+ est donnée par [32, 38]

$$h_+(t) = A e^{-(t-t_f)/\tau_{022}} \cos(\omega_{022}(t - t_f) + B) \quad (2.11)$$

où ω_{022} est la fréquence du mode, τ_{022} est le temps d'amortissement et pour rappel t_f est le moment auquel les deux trous noirs fusionnent. Ainsi, en comparant le signal de la phase d'amortissement avec ce modèle, on peut déterminer si le trou noir formé est bien un trou noir de Kerr.

La difficulté principale de ce test réside dans la détermination du temps auquel la phase d'amortissement a commencé. On comprend en regardant la Figure 2.2 qu'il n'est pas si simple de savoir exactement quand finit la fusion et quand commence l'amortissement. On a alors utilisé plusieurs temps différents de départ. En notant $t_0 = t_f + \Delta t$ le temps à partir duquel la phase d'amortissement s'est amorcée, on peut changer celui-ci en choisissant différents Δt . Le résultat pour l'évènement GW150914 est présenté sur la Figure 2.3. On remarque qu'autour de Δt égale à 3 et 5 ms, le modèle est en accord avec les mesures.

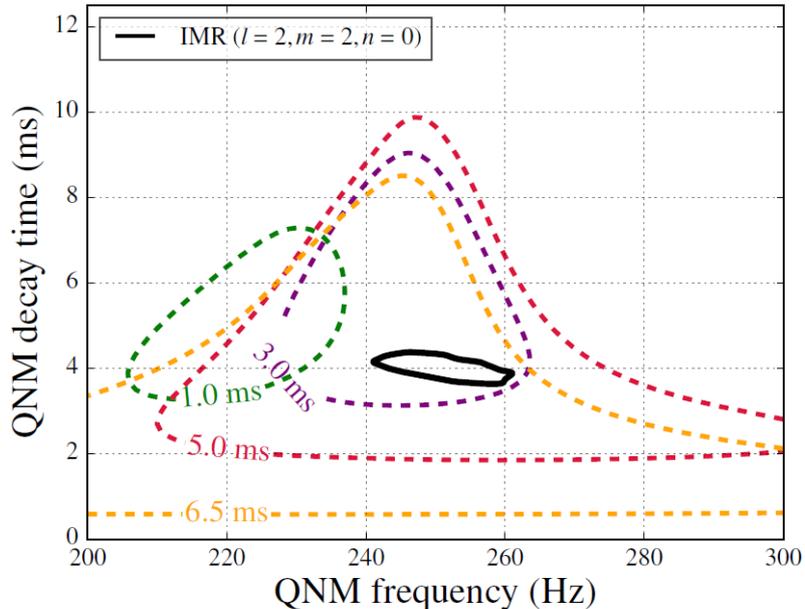


FIGURE 2.3 – En noir, la zone représente les différentes valeurs possibles pour τ_{022} et ω_{022} obtenues grâce au signal de l'onde gravitationnelle. En couleurs, les zones donnent ces mêmes paramètres obtenus à l'aide de l'équation (2.11) pour différents choix de Δt [38].

De plus, ces mêmes observations sur la phase d'amortissement permettraient aussi de tester l'hypothèse de censure cosmique : une singularité gravitationnelle dans l'espace-temps est toujours incluse dans un horizon des événements. Cette hypothèse provient simplement du fait que l'on préfère qu'une singularité n'ait aucune conséquence sur le reste de l'univers, il n'y a cependant aucune démonstration à cela. Si cette hypothèse s'avère fautive, alors il existerait ce que l'on appelle des singularités nues. Nous voyons donc que l'observation d'ondes gravitationnelles pourrait révéler l'existence d'objets exotiques différant quelque peu d'un trou noir. L'évènement GW150914 ne permet pas de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse de censure cosmique. En effet, l'application des contraintes obtenues sur les modèles de trou noir de Kerr ou

de gravastar, par exemple, n'implique pas l'exclusion de l'un de ces modèles au profit de l'autre [27]. Une amélioration de la précision des détecteurs permettraient certainement de conclure définitivement ce sujet.

Géométrie de l'univers

Pour le dernier exemple, passons du côté de la cosmologie. A grande échelle, l'univers semble homogène et isotrope. Si l'on prend ces deux caractéristiques comme hypothèse de base, les équations d'Einstein admettent le modèle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (abrégié en FLRW) d'univers comme solution. Dans ce modèle, la métrique de l'univers à grande échelle est donnée par (avec $c = 1$) [17]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.12)$$

où t et (σ, θ, ϕ) sont respectivement les coordonnées temporelles et spatiales et $a(t)$ est le facteur d'échelle. Le paramètre k est la courbure spatiale de l'univers, elle peut être plate ($k = 0$), positive ou négative ($k = \pm 1$). On peut relier le facteur d'échelle à des observables à l'aide de l'équation de Friedmann

$$H(t) = H_0 \left(\Omega_M(t) + \Omega_\Lambda(t) - \frac{k}{H_0^2 a^2} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

où $H \equiv \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble-Lemaître, H_0 est H au temps présent et Ω_M et Ω_Λ sont les densités d'énergie de la matière noire et de l'énergie noire. Si le modèle FLRW s'avère exact, mesurer précisément ces différents paramètres permettraient de déterminer la géométrie de l'univers à grande échelle. Intéressons-nous plus spécifiquement à H qui donne la vitesse d'expansion de l'univers. Le paramètre de Hubble-Lemaître a été pour la première fois mesuré par Edwin Hubble grâce à l'observation du décalage vers le rouge du spectre de certaines galaxies. Jusqu'à présent sa valeur a été mesurée par deux méthodes différentes. L'une utilise l'échelle des distances cosmiques qui permet de déterminer la distance d'une source à l'aide des céphéides et des supernovas. L'autre mesure le fond cosmologique diffus qui permet d'étudier comment l'univers s'est comporté depuis le Big Bang. Cependant, un problème apparaît : les deux mesures ne concordent pas, avec une tension de 3 sigmas [30]. La source de cette discordance n'est pas claire et c'est ici que les ondes gravitationnelles entrent en jeu car elles permettent aussi une détermination du paramètre de Hubble-Lemaître.

En effet, pour une certaine source, on peut définir sa distance de luminosité

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (2.14)$$

où L est sa luminosité intrinsèque et F sa luminosité apparente. On obtient alors le paramètre de Hubble-Lemaître au travers de la formule [17]

$$H_0 = cz/D_L \quad (2.15)$$

où z est le décalage vers le rouge (*redshift* en anglais) au niveau de la source. La détection d'une onde gravitationnelle permet de déterminer D_L et donne par la même occasion la localisation de la coalescence. Dans le cas d'une fusion d'étoiles à neutrons, la lumière provenant du phénomène permet de directement déterminer z . Il est ainsi possible de connaître les deux paramètres dans (2.15) et de déterminer la constante de Hubble. Le résultat est visible sur la Figure 2.4. On voit que ce seul évènement ne suffit pas à départager quelle est la véritable valeur de H_0 . Pour cela, on prévoit généralement qu'il faudra attendre une cinquantaine de détections de coalescence d'étoiles à neutrons avec une contrepartie électromagnétique observée. Un tel nombre de détections devrait être atteint d'ici une dizaine d'années [17, 30].

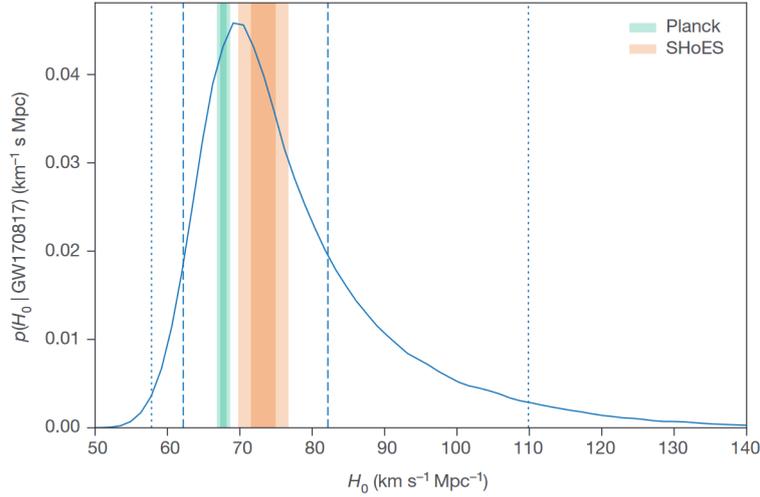


FIGURE 2.4 – Paramètre de Hubble obtenu à l’aide de l’évènement GW170817 en bleu. Les zones en vert et orange donnent la valeur de H_0 obtenue respectivement par le satellite Planck mesurant le fond diffus cosmologique et par la méthode de l’échelle des distances cosmologiques [31].

2.1.2 L’effondrement gravitationnel

L’effondrement gravitationnel est le sort réservé à toute étoile en fin de vie ayant une masse supérieure à environ 10 masses solaires. Cet évènement se produit lorsque l’étoile a déjà synthétisé une grande partie de sa masse en ^{56}Fe par fusion nucléaire. Cet élément ayant le plus d’énergie de liaison par nucléon, il est aussi le plus stable et aucune réaction supplémentaire n’est obtenue à partir de celui-ci. Le coeur de l’étoile formé de fer ne produit donc plus aucune radiation permettant de soutenir son propre poids. Ceci alors qu’au travers de la fusion du silicium, de plus en plus de noyau de ^{56}Fe sont créés.

Lorsque ce coeur de fer atteint la masse de Chandrasekhar, estimée à environ 1,4 masse solaire, la pression de dégénérescence des électrons due au principe d’exclusion de Pauli ne suffit plus à soutenir le poids de l’étoile et celle-ci s’effondre rapidement. Son coeur passe alors en approximativement une seconde d’un rayon comparable à celui de la Terre à un rayon de 50 km. Lors de cet effondrement, les protons des noyaux de fer capturent des électrons créant ainsi des neutrons et des neutrinos. Le coeur de l’étoile se transforme ainsi en étoile à neutrons et le processus d’effondrement s’accélère car la pression de dégénérescence des électrons diminue à cause de la disparition de ces derniers. Lorsque la densité atteint une valeur de $\rho \simeq 8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, correspondant à trois fois la densité d’un noyau atomique, la répulsion due à la force nucléaire entre neutrons jugule brusquement l’effondrement. Si brusquement qu’une onde de choc, dû à l’arrêt soudain de la matière dans sa chute, expulse violemment les couches extérieures de l’étoile créant ainsi l’explosion que l’on appelle supernova. Le coeur de neutrons restant évolue soit en étoile à neutrons soit, si sa masse est suffisante, en un trou noir.

Telle était l’histoire communément admise de la fin de vie d’une étoile engendrant une supernova. Cependant, de récentes simulations numériques ont montré que l’énergie libérée lors du choc dû à l’arrêt soudain de l’effondrement sur le coeur de neutrons n’est pas suffisante pour engendrer l’explosion de la supernova [32]. Un autre processus devrait donc s’enclencher peu de temps après l’effondrement stellaire mais aucun scénario n’est connu avec certitude. On sait cependant que les neutrinos devraient avoir un rôle à jouer car la majeure partie de l’énergie libérée lors de l’effondrement sert en fait à générer ces particules.

Un premier moyen d’étudier ces supernovas serait donc au travers de la détection de ces neutrinos. Un second pourrait être les simulations numériques. Toutefois, celles-ci sont extrêmement complexes et les ordinateurs actuels sont incapables de tenir compte de tous les

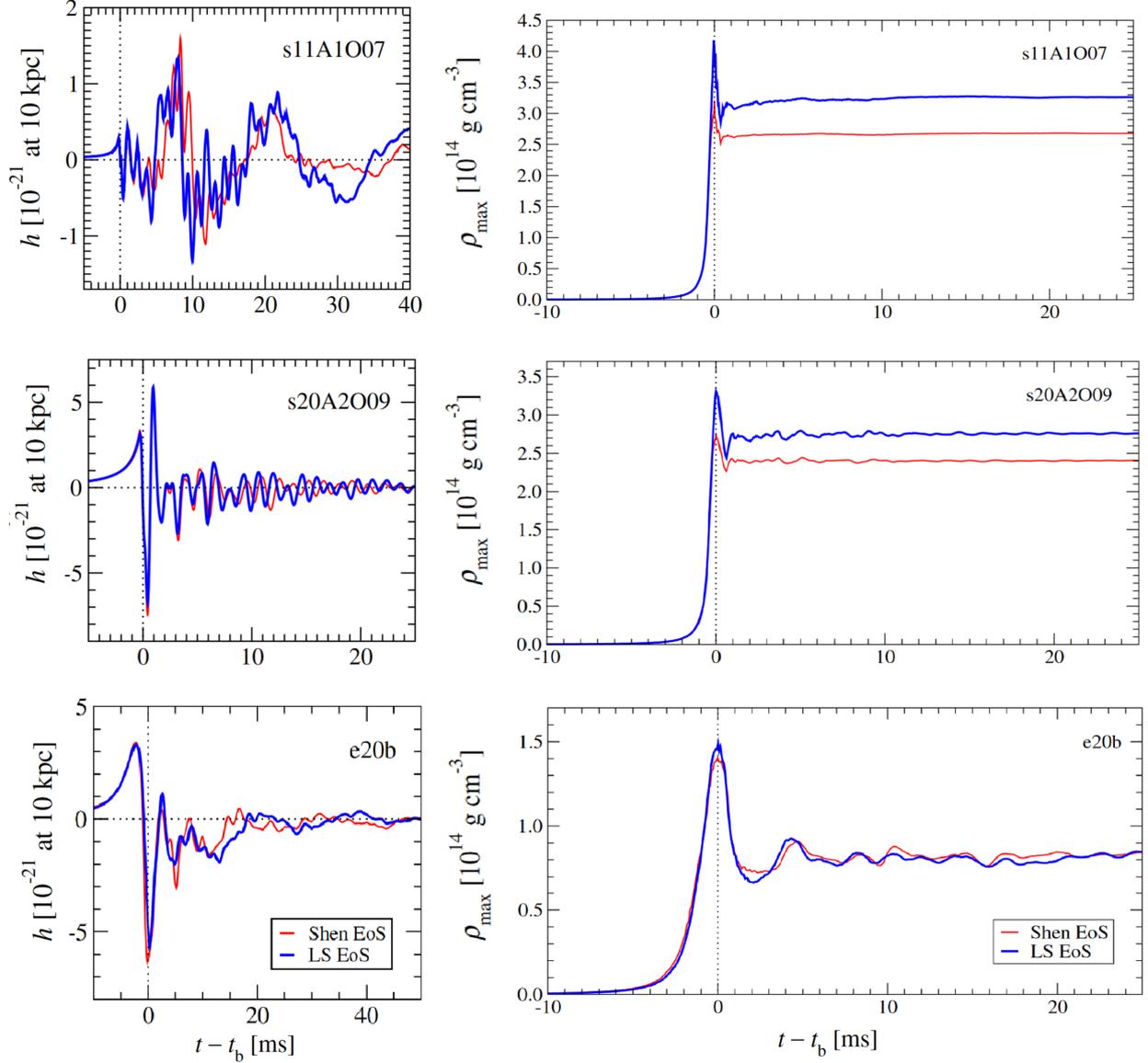


FIGURE 2.5 – Résultats de simulations de supernovae effectuées par H. Dimmelmeier *et al.* en utilisant deux équations d'état différentes pour le coeur de l'étoile, Shen et LS. A gauche et de haut en bas, on a respectivement l'évolution de l'amplitude des ondes gravitationnelles générées par une supernova dont le coeur a une vitesse de rotation respectivement faible, moyenne et élevée. A droite, on voit les évolutions de la densité du coeur de l'étoile correspondants au cas à leur gauche. Le temps t_b est le moment du rebond [41].

mécanismes physiques présents. En effet, une simulation parfaite devrait inclure de la magnétohydrodynamique à trois dimensions dans le cadre de la relativité générale. De plus, il faut y ajouter le transport des neutrinos ainsi que des effets spécifiques à une étoile à neutrons comme son équation d'état par exemple. A ce jour, différentes simulations ont été effectuées qui sont conformes à seulement quelques uns des critères précédents à la fois [39]. Enfin, le dernier moyen permettant d'étudier les supernovas est bien sûr la détection des ondes gravitationnelles générées par les asymétries dans les mouvements de masses. Différents mécanismes physiques donneront lieu à des ondes gravitationnelles de formes différentes. L'analyse de ces dernières permettra de mieux déterminer le fonctionnement de chacun de ces mécanismes et donc, au final, le processus complet de la supernova.

Comme exemple, considérons la vitesse de rotation du coeur de l'étoile, notée Ω_c , avant le rebond dû à la force nucléaire. Trois scénarios sont possibles qui se différencient par l'amplitude de la vitesse de rotation [32,40] :

1. Vitesse faible : $\Omega_c \leq 1,5$ rad/s. Le rebond est important dans ce cas-ci et la densité atteint 4×10^{14} g/cm³ dans le coeur lors de l'effondrement. De forts mouvements de convections sont induits par le choc et le coeur s'étend ensuite pour se stabiliser rapidement à une densité légèrement plus faible. Ce scénario ne développe pas de mouvements de masse quadrupolaires importants, les ondes gravitationnelles générées sont ainsi les plus faibles des trois scénarios comme on peut le voir sur la Figure 2.5. L'énergie totale émise en ondes gravitationnelles est au maximum de l'ordre de³

$$E_{GW} \simeq 1 \times 10^{-9} M_{\odot} c^2. \quad (2.16)$$

2. Vitesse moyenne : $1,5 \text{ rad/s} \leq \Omega_c \leq 6 - 13$ rad/s. Dans ce cas-ci, on peut voir sur la Figure 2.5 que la densité atteinte lors de l'effondrement est moindre que dans le cas de la faible vitesse. Le rebond reste important bien que les mouvements de convection ultérieurs soient amoindris. La rotation plus rapide du coeur induit des moments quadrupolaires de masses et donc des amplitudes d'ondes gravitationnelles plus importants. L'énergie émise est de l'ordre de

$$E_{GW} \simeq (0,5 - 5) \times 10^{-8} M_{\odot} c^2. \quad (2.17)$$

Notons que la borne supérieure de vitesses pour ce régime n'est pas bien définie. Ceci est dû au fait qu'elle dépend fortement de la masse du coeur de l'étoile ; plus celle-ci est importante et plus la vitesse maximale est faible.

3. Vitesse élevée : $6 - 13 \text{ rad/s} \leq \Omega_c$. Pour des vitesses de rotation élevées, l'effet de la force centrifuge est de ne pas permettre une élévation de la densité aussi forte qu'avant. On le voit sur la Figure 2.5, la densité n'atteint même pas celle d'un noyau atomique. Le rebond est donc beaucoup moins important que dans les deux derniers cas. Toutefois, l'amplitude des ondes gravitationnelles générées est toujours plus élevée que dans le premier scénario car la rotation rapide induit de fortes asymétries dans l'étoile. L'énergie émise est comprise dans l'intervalle

$$7 \times 10^{-10} M_{\odot} c^2 \leq E_{GW} \leq 5 \times 10^{-9} M_{\odot} c^2. \quad (2.18)$$

Chaque scénario émet des ondes gravitationnelles ayant des propriétés différentes, que ce soit dans leur forme ou leur fréquence. Détecter celles-ci permettrait donc de savoir quel scénario est privilégié dans les supernovas et de connaître ainsi la vitesse de rotation du coeur de l'étoile ainsi que sa densité maximale atteinte lors de l'effondrement. Jusqu'à présent, les observations montrent que les étoiles à neutrons naissent avec des vitesses de rotation plutôt faibles. S'il s'avère que leur rotation est rapide lors de la supernova, il faut donc qu'il y ait assez de pertes

3. En comparaison, la coalescence de trous noirs GW150914 a libéré une énergie de $(3,0 \pm 0,5) M_{\odot} c^2$ en ondes gravitationnelles [1].

d'énergie via les ondes gravitationnelles pour que cette vitesse diminue afin de correspondre avec les observations [42].

Pour finir, précisons que les ondes gravitationnelles émises par les effondrements stellaires ont des fréquences entre 200 et 1000 Hz. Les interféromètres terrestres sont donc tout indiqués pour détecter ces ondes. Malheureusement, leurs amplitudes ne sont pas suffisamment élevées pour qu'une détection soit possible avec les interféromètres actuels⁴. Il faudra sûrement attendre les détecteurs de troisième génération comme le télescope Einstein ou Cosmic Explorer pour réellement commencer l'étude de l'effondrement gravitationnel à l'aide des ondes gravitationnelles [42].

4. A moins que la supernova ne soit située dans notre galaxie. Cependant, de tels évènements sont rares et on estime le nombre de supernova dans la galaxie à $(1,7 \pm 1.0)$ par siècle [32].

Chapitre 3

Eléments d'optique quantique

Afin de pouvoir discuter du bruit quantique, nous serons amenés à décrire la propagation du champ électromagnétique quantifié dans l'interféromètre Michelson. Un passage par l'optique quantique est ainsi bien nécessaire. Un traitement classique plus approfondi de l'interféromètre Michelson permet de mettre en lumière que le signal d'une onde gravitationnelle apparaît sur des bandes de fréquences latérales à la fréquence du laser de l'interféromètre. Autrement dit, si le laser est de fréquence ω , le signal d'une onde gravitationnelle de fréquence Ω apparaît sur les fréquences $\omega \pm \Omega$ du champ électromagnétique. Il apparaît donc, dans les cavités Fabry-Perot, un processus de création de paires de photons de fréquences $\omega_{\pm} = \omega \pm \Omega$ dont les amplitudes complexes sont corrélées. Ceci nécessite l'introduction du formalisme à deux photons, développé par Caves et Schumaker [43,44]. Nous présenterons d'abord le formalisme standard à un photon afin de mieux comprendre comment on peut passer à celui à deux photons. De plus, le spectre de fréquence de l'onde gravitationnelle est continu et il est donc nécessaire d'avoir un continuum de fréquences pour l'onde électromagnétique. La plupart des textes relatifs à l'optique quantique quantifient le champ électromagnétique dans une cavité, ce qui implique une discrétisation des modes du champ. Il est toutefois possible d'obtenir un spectre continu, un tel formalisme étant présenté dans [45,46], nous nous baserons sur ces références afin d'obtenir un champ électromagnétique quantifié approprié au traitement de l'interféromètre.

3.1 Quantification du champ électrique

Mathématiquement, le processus de création d'un photon de fréquence ω est décrit par l'opérateur de création $\hat{a}_{\omega}^{\dagger}$, hermitien conjugué de l'opérateur d'annihilation \hat{a}_{ω} . Les photons étant des bosons, ces opérateurs vérifient les relations de commutation

$$[\hat{a}_{\omega}, \hat{a}_{\omega'}^{\dagger}] = \delta_{\omega\omega'} \quad [\hat{a}_{\omega}, \hat{a}_{\omega'}] = 0. \quad (3.1)$$

Ces deux opérateurs sont à la base du formalisme à un photon que nous allons à présent développer. En théorie quantique des champs, le champ électrique est élevé au rang d'opérateur et est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des opérateurs \hat{a}_{ω} et $\hat{a}_{\omega}^{\dagger}$ sur un ensemble de fréquences propres ω . Suivant la méthode de quantification dans une cavité de volume V présentée dans [47], le champ électrique quantifié prend la forme¹

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\epsilon}_l (\hat{a}_{\omega_l} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \hat{a}_{\omega_l}^{\dagger} e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)}) \quad (3.2)$$

1. Sauf en de rares cas, nous travaillerons toujours selon le point de vue de Heisenberg. La dépendance temporelle est donc comprise dans les opérateurs et non dans les états quantiques.

où on somme sur l'ensemble des modes propres l de la cavité, de fréquence ω_l et de vecteur d'onde \mathbf{k}_l . Le vecteur $\boldsymbol{\epsilon}_l$ est le vecteur polarisation lié au mode l . Si nous considérons ce dernier comme étant le même pour tous les modes, autrement dit $\boldsymbol{\epsilon}_l = \boldsymbol{\epsilon}$ pour tout l , nous pouvons poser $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\epsilon} \hat{E}(\mathbf{r}, t)$ avec

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{\omega_l} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} + \hat{a}_{\omega_l}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)}). \quad (3.3)$$

Par la suite, nous considérerons la propagation du champ électromagnétique dans une cavité de longueur L dans une certaine direction z . Dans ce cas, le vecteur d'onde est donné par

$$\mathbf{k}_l = k_l \mathbf{e}_z = \frac{\omega_l}{c} \mathbf{e}_z. \quad (3.4)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. De plus, la structure spatiale de l'onde électromagnétique peut s'avérer très vite alambiquée dans le cas des grands interféromètres comme Virgo. Bien que cette structure soit importante pour certains types de bruits (le bruit thermique par exemple [21]), sa description est peu utile dans le cas du bruit quantique. Nous réduisons donc la structure transverse de l'onde électromagnétique à sa plus simple expression. Pour cela, nous considérons un volume de quantification de forme cylindrique avec $V = AL$ où A est l'aire occupée par le faisceau dans le plan perpendiculaire à z . Tout ceci permet d'approximer l'expression de l'opérateur champ électrique tel que

$$\hat{E}(z, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 AL}} (\hat{a}_{\omega_l} e^{-i\omega_l(t-z/c)} + \hat{a}_{\omega_l}^\dagger e^{i\omega_l(t-z/c)}). \quad (3.5)$$

Voyons à présent comment obtenir un continuum sur les fréquences. Pour une cavité de longueur L , les écarts entre deux nombres d'onde k_l et deux pulsations ω_l consécutifs sont donnés par

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi c}{L}. \quad (3.6)$$

On remarque qu'il suffit de prendre la limite $L \rightarrow \infty$ afin que le spectre de fréquence devienne continu. En suivant les prescriptions de [46], on utilise les transformations

$$\hat{a}_{\omega_l} \rightarrow \sqrt{\Delta\omega} \hat{a}_\omega \quad \sum_l \rightarrow \frac{1}{\Delta\omega} \int_0^\infty d\omega \quad (3.7)$$

ce qui permet d'écrire l'opérateur champ électrique sous sa forme finale

$$\boxed{\hat{E}(z, t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 Ac}} (\hat{a}_\omega e^{-i\omega(t-z/c)} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega(t-z/c)}) d\omega.} \quad (3.8)$$

Enfin, nous allons définir des opérateurs qui sont abondamment utilisés dans les calculs de bruit quantique. Remarquons que les opérateurs d'annihilation et de création ne sont pas hermitiques alors que l'opérateur champ électrique l'est bien. Ce dernier étant combinaison linéaire des premiers, il doit donc être possible de trouver des opérateurs hermitiques formés par une combinaison linéaire de \hat{a}_ω et \hat{a}_ω^\dagger . Ces opérateurs sont nommés respectivement opérateurs de quadrature d'amplitude et de quadrature de phase et sont définis par

$$\hat{a}_{c,1}(\omega) = \frac{\hat{a}_\omega^\dagger + \hat{a}_\omega}{\sqrt{2}} \quad \hat{a}_{s,1}(\omega) = \frac{\hat{a}_\omega - \hat{a}_\omega^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (3.9)$$

Précisons que d'autres définitions, qui diffèrent d'un facteur multiplicatif, peuvent être trouvées dans la littérature. L'indice 1 permet de différencier les opérateurs de quadrature à un photon

de ceux que nous définirons dans le formalisme à deux photons. Sous forme de combinaison linéaire de ces opérateurs de quadrature, le champ électrique s'écrit

$$\hat{E}(z, t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 A c}} [\hat{a}_{c,1}(\omega) \cos(\omega(t - z/c)) + \hat{a}_{s,1}(\omega) \sin(\omega(t - z/c))] d\omega \quad (3.10)$$

ce qui justifie les indices c et s . Nous voyons à partir de cette expression que l'opérateur champ électrique va passer périodiquement au cours du temps ou dans l'espace d'un opérateur de quadrature à l'autre. Ceci signifie aussi que si les variances des opérateurs de quadrature ne sont pas égales, la variance du champ électrique évoluera au cours du temps.

Ces opérateurs $\hat{a}_{c,1}$ et $\hat{a}_{s,1}$ étant hermitiques, ils représentent des observables physiques qui peuvent être mesurées par ce que l'on appelle une détection homodyne (ou hétérodyne selon la méthode utilisée) que nous présenterons dans la section 3.3. A partir de (3.1), on voit qu'ils vérifient les relations de commutation

$$[\hat{a}_{c,1}(\omega), \hat{a}_{s,1}(\omega')] = i\delta(\omega - \omega'). \quad (3.11)$$

La relation d'incertitude d'Heisenberg permet donc d'obtenir l'inégalité suivante sur les variances de ces opérateurs à une même fréquence

$$(\Delta\hat{a}_{c,1})^2 (\Delta\hat{a}_{s,1})^2 \geq \frac{1}{4} \quad (3.12)$$

et ce pour n'importe quel état de la lumière. Remarquons que cette relation ne contraint que le produit des variances. Il est donc tout à fait possible que la variance de $\hat{a}_{c,1}(\omega)$ soit plus petite que celle de $\hat{a}_{s,1}(\omega)$ et inversement. Nous avons à présent tous les opérateurs qui nous seront nécessaires pour la suite. Il est temps de passer à la description des états quantiques de la lumière et surtout de voir ce qui les différencie.

3.2 Les états quantiques de la lumière

Voyons à présent les différents états de la lumière que l'on peut décrire à l'aide du formalisme à un photon. Notre but étant d'étudier le bruit quantique présent dans un interféromètre, nous nous intéresserons particulièrement à la variance des opérateurs dans chaque état différent. Nous commencerons par les états de Fock car ils forment une base permettant d'exprimer les autres états en fonction de ceux-ci. Ensuite, nous continuerons avec les états les plus simples à produire, les états cohérents. Un laser émet de la lumière dans une mixture d'états cohérents et c'est cet état qui arrive généralement sur la lame séparatrice d'un interféromètre Michelson. Enfin nous passerons aux états comprimés et expliciterons leur différence majeure avec les états cohérents. Cette différence fait toute la spécificité des états comprimés et nous verrons en quoi elle peut nous servir dans la détection des ondes gravitationnelles. Pour simplifier la présentation, nous n'étudierons que le cas d'états monomodes (à une fréquence spécifique), la description multimode étant obtenue en sommant ou en intégrant simplement sur les fréquences désirées. Nous n'écrirons donc plus la dépendance en ω des divers opérateurs.

3.2.1 Les états de Fock

Les états de Fock sont définis comme étant les états propres de l'opérateur donnant le nombre de photons $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. On les note $|n\rangle$ et ils vérifient

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (3.13)$$

où $n \in \mathbb{N}$. L'utilité théorique de tels états est qu'ils sont orthonormés, autrement dit $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$, et que tout autre état $|\psi\rangle$ peut s'écrire comme une superposition d'états de Fock

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (3.14)$$

où les c_n sont des nombres complexes tels que $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Les états de Fock forment donc une base orthonormée des états quantiques de la lumière [48]. L'application des opérateurs d'annihilation et de création sur un état de Fock donne

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (3.15)$$

3.2.2 Les états cohérents

Il existe plusieurs manières de définir les états cohérents [48,49]. Pour mettre en lumière la raison pour laquelle ces états sont souvent qualifiés de "quasi-classiques", nous posons deux conditions qu'ils doivent vérifier [50]. La première est que la valeur moyenne du champ électrique quantifié dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$ soit égale à celle d'un champ électrique classique d'amplitude complexe $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 Ac}}\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$. En comparant les expressions des champs électriques classique et quantifié données respectivement par (1.1) et (3.8), nous voyons que cette condition s'écrit comme

$$\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha. \quad (3.16)$$

Ensuite, nous requérons que les énergies de ces champs soient égales. Pour l'amplitude complexe précédente, l'énergie d'un champ électrique classique est donnée par $E_{cl} = \hbar\omega|\alpha|^2$. Quant à l'énergie du champ quantifié, elle est représentée par l'opérateur $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Dans le cas de l'état cohérent $|\alpha\rangle$, cette seconde condition s'écrit donc comme

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (3.17)$$

Des deux équations précédentes, on peut en tirer

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle + |\alpha|^2 &= 2|\alpha|^2 = \alpha^*\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle + \alpha\langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \\ \Leftrightarrow \langle\alpha|(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)(\hat{a} - \alpha)|\alpha\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Une telle égalité est vérifiée si et seulement si l'on a

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.18)$$

Un état cohérent est donc un état propre de l'opérateur d'annihilation de valeur propre complexe α . Cette propriété est souvent admise comme définition et permet de déterminer les différentes moyennes et variances des opérateurs définis précédemment. Nous avons précisé ci-dessus que tout état de la lumière peut être mis sous forme d'une combinaison linéaire d'états de Fock. Pour les états cohérents, on vérifie aisément que l'état

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.19)$$

est bien état propre de l'opérateur \hat{a} de valeur propre α . Un état cohérent n'a donc pas un nombre de photons bien défini. De (3.19), on voit que la probabilité $P(n)$ de mesurer n photons est donnée par

$$P(n) = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (3.20)$$

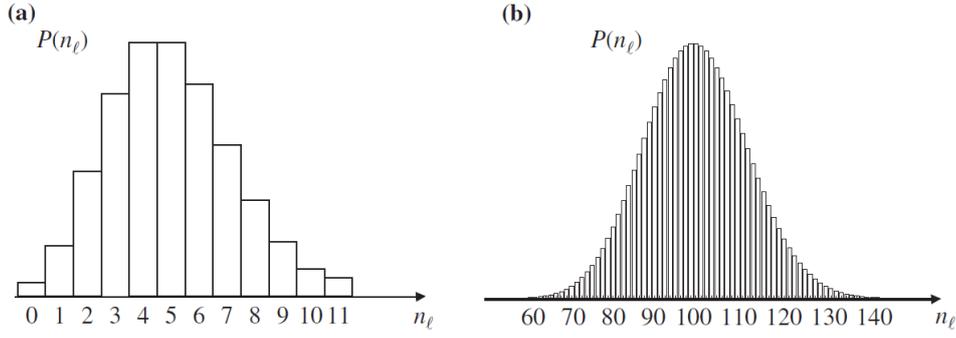


FIGURE 3.1 – Histogramme de la probabilité de mesurer un certain nombre de photons dans un état cohérent, pour $|\alpha|^2 = 5$ à gauche et $|\alpha|^2 = 100$ à droite [47].

ce qui est une distribution de Poisson (voir Figure 3.1). Ceci se confirme lorsque l'on calcule la valeur moyenne $\langle \hat{N} \rangle$ et la variance $(\Delta N)^2$ du nombre de photons

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (\Delta N)^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2. \quad (3.21)$$

L'égalité de la moyenne et de la variance est bien la signature d'une distribution de Poisson. Nous voyons qu'il existe un état ayant un nombre de photons bien défini, celui où $\alpha = 0$. Cet état, noté $|0\rangle$, est plus communément connu sous le nom d'état du vide et représente l'absence de photons. Il nous sera utile pour la suite.

Étudions à présent l'état cohérent à la lumière des opérateurs de quadrature $\hat{a}_{c,1}$ et $\hat{a}_{s,1}$. Tout d'abord, les valeurs moyennes de ces opérateurs dans l'état $|\alpha\rangle$ sont

$$\langle \hat{a}_{c,1} \rangle = \sqrt{2}\Re\{\alpha\} \quad \langle \hat{a}_{s,1} \rangle = \sqrt{2}\Im\{\alpha\}. \quad (3.22)$$

La partie réelle du champ électrique dans un état cohérent se situe donc sur sa dépendance en cosinus. Plus importantes sont les variances des opérateurs de quadrature. Après un bref calcul, on trouve

$$\Delta \hat{a}_{c,1} = \Delta \hat{a}_{s,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.23)$$

On voit que la variance des deux opérateurs est la même et qu'un état cohérent minimise l'inégalité d'Heisenberg (3.12). Cette dernière propriété est déjà intéressante en elle-même quant à la réduction du bruit quantique. Remarquons que dans le cas de l'état du vide, la moyenne des opérateurs de quadrature est nulle. Toutefois, leurs variances ne le sont pas ! Ces dernières sont d'ailleurs exactement les mêmes que pour n'importe quel autre état $|\alpha\rangle$. Un état cohérent

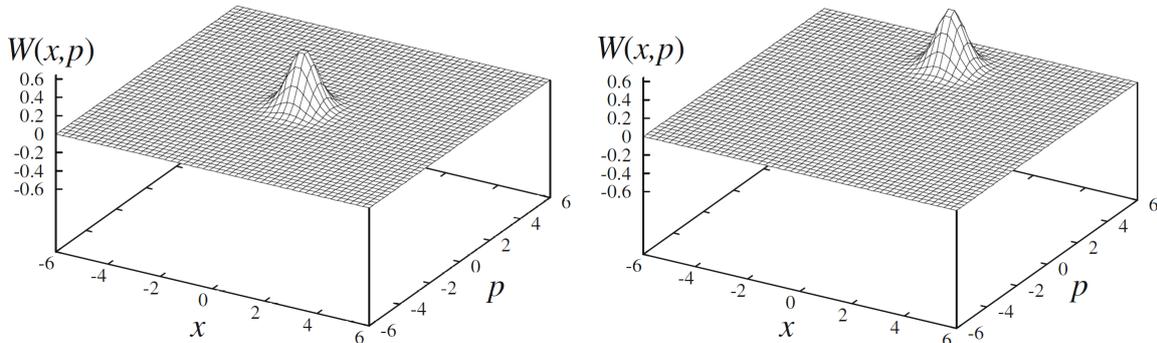


FIGURE 3.2 – Fonction de Wigner du vide (à gauche) et d'un état cohérent (à droite). Les variables x et p sont les quadratures du champ électromagnétique [48].

peut donc être vu comme un état du vide, possédant des fluctuations quantiques, auquel on ajoute une amplitude classique α . Cette façon de voir est d'ailleurs confirmée lorsque l'on s'intéresse à la fonction de Wigner d'un état cohérent. Cette fonction est ce que l'on appelle une fonction de quasiprobabilité et permet de généraliser le concept de densité de probabilité classique dans l'espace des phases. Les variables de notre espace des phases étant dans ce cas-ci nos quadratures. On observe bien sur la Figure 3.2 que l'état cohérent est simplement l'état du vide déplacé afin d'obtenir une valeur non nulle pour la moyenne des opérateurs de quadrature.

3.2.3 Les états comprimés dégénérés

Dans la section précédente, on a vu que la variance des opérateurs de quadrature était la même pour les deux opérateurs. On peut alors se demander si, dans certaines expériences, il ne vaudrait pas mieux avoir une variance moins élevée sur l'une des deux quadratures au détriment de l'autre (l'inégalité d'Heisenberg devant toujours être respectée). C'est effectivement le cas et c'est là que les états comprimés entrent en jeu. Ces états étant expérimentalement créés à l'aide d'un processus de création à deux photons, leur description formelle nécessite l'introduction du formalisme à deux photons. Cependant, la définition des opérateurs de quadrature dans ce formalisme ne coïncide plus avec celle de $\hat{a}_{c,1}$ et $\hat{a}_{s,1}$ et la comparaison avec les états cohérents devient moins évidente. Nous donnerons donc ici une description de ce que l'on appelle des états comprimés dégénérés, où les deux photons créés sont de même fréquence. Dans ce cas, aucune corrélation n'est créée entre photons de fréquences différentes et le formalisme à un photon peut être conservé ainsi que nos opérateurs de quadrature actuels.

A nouveau, il existe plusieurs façons de définir un état comprimé. Nous allons ici utiliser une méthode un peu plus théorique que pour le cas des états cohérents. A partir des opérateurs d'annihilation \hat{a} et de création \hat{a}^\dagger , on définit deux nouveaux opérateurs

$$\hat{a}_R = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger \quad \hat{a}_R^\dagger = u^*\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a} \quad (3.24)$$

où $u, v \in \mathbb{C}$. On impose comme contrainte d'avoir une transformation canonique pour passer du couple $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ au couple $(\hat{a}_R^\dagger, \hat{a}_R)$. On voit que

$$[\hat{a}_R, \hat{a}_R^\dagger] = [u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger, u^*\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}] = (|u|^2 - |v|^2)[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \quad (3.25)$$

et donc pour avoir une transformation canonique, il faut $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Connaissant la relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, on peut donc écrire u et v comme

$$u = e^{i\theta_1} \cosh R \quad v = e^{i\theta_2} \sinh R. \quad (3.26)$$

Pour l'instant, afin de mieux faire la comparaison avec les états cohérents, prenons $\theta_1 = \theta_2 = 0$ (nous verrons le cas plus général avec les états comprimés non dégénérés). Dans ce cas, la transformation donne

$$\hat{a}_R = \hat{a} \cosh R + \hat{a}^\dagger \sinh R \quad \hat{a}_R^\dagger = \hat{a}^\dagger \cosh R + \hat{a} \sinh R. \quad (3.27)$$

On obtient ce que l'on appelle une transformation de Bogoliubov. Cette transformation fut introduite à l'origine par Nikolay Bogoliubov afin de traiter les paires d'électrons de Cooper dans la théorie BCS de la supraconductivité [51]. Remarquons que R est souvent appelé facteur de compression. Expérimentalement, on mesure le niveau de compression en décibels. La conversion entre R et cette mesure expérimentale notée R_{dB} est donnée par

$$R_{dB} = 10 \log_{10} e^{2R} \Leftrightarrow R = \frac{R_{dB}}{20 \log_{10} e}. \quad (3.28)$$

Une compression de 10 décibels correspond ainsi à $R \simeq 1,15$.

Une autre façon d'obtenir les transformations de Bogoliubov est d'introduire l'opérateur de compression

$$\hat{S}(R) = e^{\frac{R}{2}((\hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a})^2)}. \quad (3.29)$$

Lorsqu'il est appliqué à l'opérateur d'annihilation \hat{a} , on obtient \hat{a}_R puisque

$$\hat{S}(R)\hat{a}\hat{S}^\dagger(R) = \hat{a} \cosh R + \hat{a}^\dagger \sinh R = \hat{a}_R. \quad (3.30)$$

Passons à présent à la définition d'un état comprimé, noté $|\alpha, R\rangle$. Celui-ci est défini, à l'instar de l'état cohérent, comme étant état propre de l'opérateur d'annihilation nouvellement introduit \hat{a}_R de valeur propre α , soit

$$\hat{a}_R |\alpha, R\rangle = \alpha |\alpha, R\rangle. \quad (3.31)$$

A nouveau, c'est cette propriété qui permet de calculer toutes les moyennes et variances d'observables. Remarquons que pour le cas particulier $R = 0$, on retrouve en fait un état cohérent

$$|\alpha, 0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (3.32)$$

Tout comme la transformation de Bogoliubov, un état comprimé peut être obtenu par application de l'opérateur de compression sur un état cohérent

$$|\alpha, R\rangle = \hat{S}(R) |\alpha\rangle \quad (3.33)$$

et on parle donc souvent de la compression d'un état cohérent. Afin de voir l'effet d'une telle compression sur le nombre de photons d'un état, il faut réexprimer l'opérateur nombre de photons \hat{N} selon nos nouveaux opérateurs \hat{a}_R et \hat{a}_R^\dagger . A partir de (3.27), on trouve

$$\hat{a} = \hat{a}_R \cosh R - \hat{a}_R^\dagger \sinh R \quad \hat{a}^\dagger = \hat{a}_R^\dagger \cosh R - \hat{a}_R \sinh R \quad (3.34)$$

et en développant \hat{N} , on obtient

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R \cosh^2 R + \hat{a}_R \hat{a}_R^\dagger \sinh^2 R - \sinh R \cosh R (\hat{a}_R^2 + \hat{a}_R^{\dagger 2}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

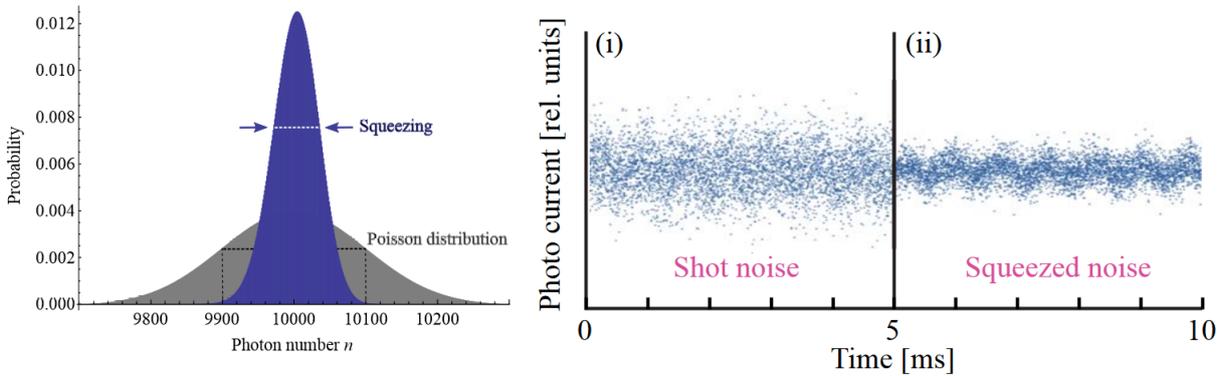


FIGURE 3.3 – A gauche, distributions du nombre de photons dans un état cohérent (en gris) et dans un état comprimé où $R > 0$ (en bleu). Le caractère sous-Poisson dans le second cas est très clair. A droite, mesures du nombre de photons dans le cas d'un état cohérent (à gauche) et d'un état comprimé où $R > 0$ (à droite). A nouveau, on remarque bien la réduction du bruit de grenaille dans le second cas [52].

Ceci permet d'obtenir la moyenne et la variance de \hat{N} dans un état comprimé qui sont

$$\langle \hat{N} \rangle = \sinh^2 R + |\alpha'|^2 \quad (\Delta N)^2 = \alpha'^2 e^{-2R} + 2 \sinh^2 R \cosh^2 R \quad (3.36)$$

où $\alpha' = (\alpha \cosh R - \alpha^* \sinh R)$. Dans le cas où le facteur de compression R est négatif, on voit que la variance sur le nombre de photons est supérieure au cas d'un état cohérent $|\alpha'\rangle$ et on dit que l'état suit une distribution sur-Poisson. Inversement, si R est positif, la variance est plus petite et on parle d'une distribution sous-Poisson (voir Figure 3.3 à gauche). Ceci est évidemment intéressant dans la réduction du bruit de grenaille, si la variance est plus petite, le nombre de photons arrivant sur le photodétecteur est plus régulier et on a donc une réduction du bruit (voir Figure 3.3 à droite). De plus, remarquons que dans un état du vide comprimé $|0, R\rangle$, le nombre moyen de photons n'est plus nul ! Il est donc impossible d'obtenir le vide, dans le sens d'une absence de photons, dans le cas d'un état comprimé.

Les opérateurs de quadrature doivent eux aussi être exprimés en fonction des opérateurs \hat{a}_R et \hat{a}_R^\dagger . On a

$$\hat{a}_{c,1} = \frac{\hat{a}_R + \hat{a}_R^\dagger}{\sqrt{2}} e^{-R} \quad \hat{a}_{s,1} = \frac{\hat{a}_R - \hat{a}_R^\dagger}{i\sqrt{2}} e^R. \quad (3.37)$$

Il est alors aisé d'obtenir leur variance dans un état comprimé donnée par

$$\Delta \hat{a}_{c,1} = \frac{e^{-R}}{\sqrt{2}} \quad \Delta \hat{a}_{s,1} = \frac{e^R}{\sqrt{2}}. \quad (3.38)$$

Un état comprimé minimise donc aussi l'inégalité d'Heisenberg, mais il ne fait pas que ça ! On voit qu'en choisissant un facteur de compression R adéquat (positif ou négatif), on peut diminuer la variance de l'un des opérateurs de quadrature. En regardant la fonction de Wigner d'un tel état, on observe bien que la fonction a été comprimée sur l'une des deux quadratures, et allongée sur l'autre (voir Figure 3.4). Ceci est intéressant car si l'une des variances est responsable du bruit quantique, alors il est possible de réduire celui-ci rien qu'en injectant un état différent de la lumière ! Nous verrons que la réalité est un peu plus compliquée mais l'idée est en soi la bonne. Enfin, remarquons que le champ électrique passe au cours du temps d'une quadrature à l'autre et donc d'une variance à l'autre. La variance du champ électrique oscille donc au cours du temps dans le cas d'un état comprimé (comme on peut le voir sur la Figure 3.4).

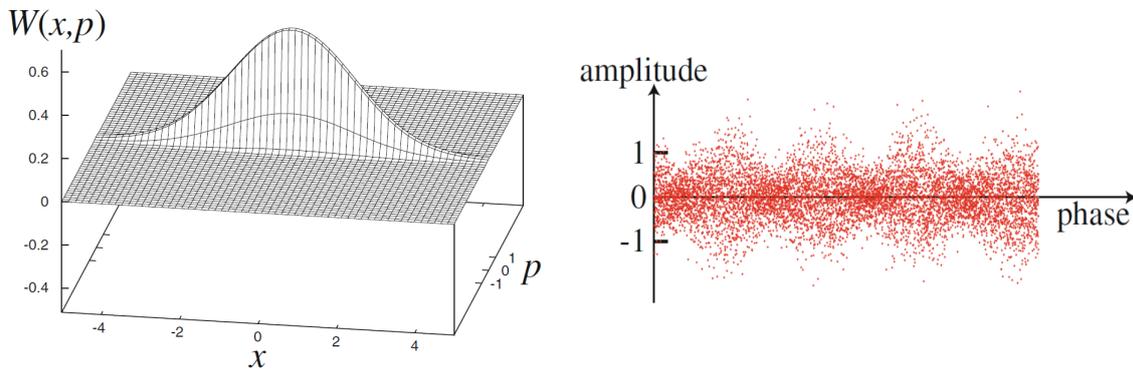


FIGURE 3.4 – À gauche, fonction de Wigner d'un état comprimé du vide à 10 dB. Les variables x et p sont les quadratures du champ électromagnétique. À droite, dépendance en phase du champ électrique dans un état du vide comprimé. On remarque bien le changement de variance selon que l'on soit au niveau de la quadrature comprimée ou allongée [48].

3.3 La détection homodyne

Comme nous l'avons précisé, les opérateurs de quadrature sont hermitiques et sont donc des observables physiques. Une manière simple de mesurer ces opérateurs serait d'avoir un photodétecteur mesurant directement le champ électrique au cours du temps. Ce champ passant périodiquement d'une quadrature à l'autre, il serait possible de mesurer chacun de ces opérateurs. Cependant, les photodétecteurs existants sont incapables de suivre l'oscillation d'un champ électrique provenant d'un laser car sa fréquence est trop grande. Lors d'une mesure directe à l'aide d'un photodétecteur, on n'obtient donc qu'une moyenne sur plusieurs périodes successives et la différence entre opérateurs de quadrature est donc complètement éclip­sée. Explicitons dans cette section le dispositif expérimental permettant de mesurer les opérateurs de quadrature : la détection homodyne. Il existe aussi la détection dite hétérodyne. Cependant, celle-ci n'est à présent plus utilisée dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles car elle ne convient pas aux méthodes de réduction du bruit quantique présentées au chapitre 5 [53].

Considérons la Figure 3.5 qui décrit le schéma général d'une détection homodyne. Le champ rentrant par le port (1) dans l'état $|\psi_1\rangle$ est celui dont on veut mesurer l'un des opérateurs de quadrature. Celui-ci est combiné sur une lame séparatrice à un deuxième champ dans l'état $|\psi_2\rangle$, appelé oscillateur local, qui provient d'un laser de même fréquence que le premier champ et est donc dans un état cohérent $|\psi_2\rangle \equiv |\alpha_2\rangle$. Après la lame séparatrice, on obtient un champ à chaque port (3) et (4) dont les opérateurs de destruction \hat{a}_3 et \hat{a}_4 sont directement reliés aux opérateurs de destruction \hat{a}_1 et \hat{a}_2 des champs entrants au travers de la transformation linéaire [48]

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t' & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

où $r, t, r', t' \in \mathbb{C}$. Cette expression est contrainte par la conservation de l'énergie et donc du nombre de photons. Il faut ainsi vérifier

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \quad (3.40)$$

ce qui résulte en les contraintes suivantes

$$|r|^2 + |t|^2 = |r'|^2 + |t'|^2 \quad r^*t + t'^*r' = 0. \quad (3.41)$$

Celles-ci ne permettent cependant pas de totalement déterminer les coefficients de (3.39) et il existe donc plusieurs conventions donnant les mêmes résultats physiques. En termes des coefficients réels de réflexivité et de transmissivité $R = |r|^2$ et $T = |t|^2$, les deux conventions les

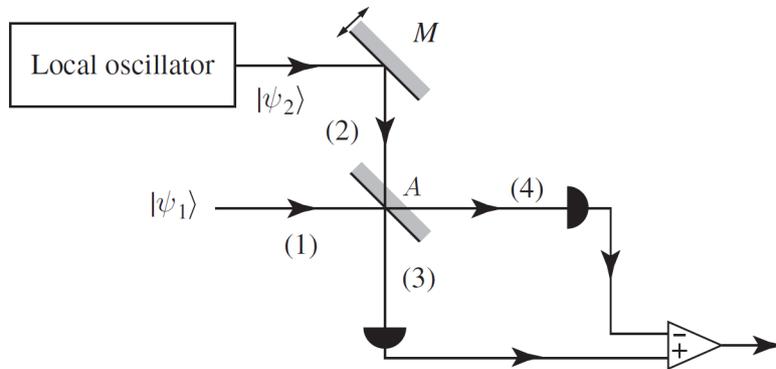


FIGURE 3.5 – Schéma général du dispositif permettant la détection homodyne [47].

plus utilisées sont [8]

$$\begin{pmatrix} \sqrt{R} & i\sqrt{T} \\ i\sqrt{T} & \sqrt{R} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & -\sqrt{R} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Elles vérifient bien toutes les deux la contrainte (3.41). Dans la suite, nous utiliserons la seconde matrice. Pour en terminer avec la lame séparatrice, nous voudrions garder la relation de commutation $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1$ pour \hat{a}_3 et \hat{a}_4 . On obtient ainsi les contraintes supplémentaires suivantes

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad |r'|^2 + |t'|^2 = 1. \quad (3.43)$$

Dans le cas d'une lame séparatrice équilibrée, on a $R = T$ et donc on obtient finalement²

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Pour la détection homodyne, deux photodétecteurs sont placés chacun à une sortie de la lame séparatrice. Ceux-ci permettent de mesurer le nombre de photons des champs provenant des ports (3) et (4). Les opérateurs représentant ces observables sont obtenus à l'aide du développement effectué pour la lame séparatrice, on obtient

$$\hat{N}_3 = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger) \quad (3.45)$$

$$\hat{N}_4 = \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger). \quad (3.46)$$

A l'aide d'un circuit électronique approprié, il est possible d'effectuer la différence entre les deux signaux provenant des photodétecteurs. L'opérateur mesuré est donc au final

$$\hat{N}_{\text{hom}} \equiv \hat{N}_3 - \hat{N}_4 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger. \quad (3.47)$$

Comme nous allons le voir de suite, la mesure de cet opérateur est en fait une mesure des opérateurs de quadrature $\hat{a}_{c,1}$ ou $\hat{a}_{s,1}$. En effet, l'état quantique des champs aux ports (3) et (4) est simplement $|\psi_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle$. La valeur moyenne mesurée est donc

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_{\text{hom}} \rangle &= \langle \psi_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger | \psi_1 \rangle \otimes | \alpha_2 \rangle \\ &= \langle \psi_1 | \hat{a}_1^\dagger | \psi_1 \rangle \alpha_2 + \langle \psi_1 | \hat{a}_1 | \psi_1 \rangle \alpha_2^*. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Puisque α_2 est un nombre complexe, on peut le mettre sous la forme $\alpha_2 = |\alpha_2| e^{i\phi}$, où ϕ est appelé l'angle de détection homodyne. En développant, ceci permet d'écrire

$$\langle \hat{N}_{\text{hom}} \rangle = \sqrt{2} |\alpha_2| (\langle \psi_1 | \hat{a}_{c,1} | \psi_1 \rangle \cos \phi + \langle \psi_1 | \hat{a}_{s,1} | \psi_1 \rangle \sin \phi). \quad (3.49)$$

Nous voyons que pour un angle $\phi = 0$, une mesure de l'opérateur $\hat{a}_{c,1}$ est effectuée tandis que pour $\phi = \pi/2$, on mesure l'opérateur $\hat{a}_{s,1}$. De plus, il apparaît clairement qu'il est possible de mesurer une combinaison des deux opérateurs de quadrature si on a $0 < \phi < \pi/2$. Ceci nous sera très utile lorsque nous discuterons de la réduction du bruit quantique! Précisons que cet angle de détection homodyne ϕ peut tout à fait être manipulé expérimentalement, la façon de faire dépendant de l'implémentation choisie pour effectuer la détection homodyne. Dans le cas des interféromètres à ondes gravitationnelles, on effectue une lecture DC afin de pouvoir effectuer la détection homodyne. Celle-ci consiste à directement imposer une différence de parcours du laser dans les bras de l'interféromètre à l'aide d'une différence de longueur initiale des bras. Dans ce cas, une partie du laser arrive au port antisymétrique et l'on peut utiliser ce champ électrique comme oscillateur local afin d'implémenter la détection homodyne. Il est alors possible de contrôler l'angle ϕ en changeant la différence de longueur initiale des deux bras [8].

2. Remarquons que le formalisme développé ici dans le cas de la lame séparatrice peut tout à fait être utilisé pour un miroir ayant des coefficients de réflexivité et de transmissivité R et T . C'est d'ailleurs ce que nous ferons dans le prochain chapitre.

3.4 Le formalisme à deux photons

3.4.1 Réexpression du champ électrique

Avant de passer au calcul du bruit quantique dans l'interféromètre Michelson, il ne nous reste plus qu'à introduire le formalisme à deux photons, dont on peut trouver une présentation dans les références [43,44,54]. Ce formalisme permet de prendre en compte le processus de création des fréquences latérales à la fréquence du laser dans l'interféromètre Michelson. En effet, le laser étant de fréquence ω_0 , le mouvement des miroirs à une fréquence Ω va créer une paire de photons aux fréquences $\omega_0 \pm \Omega$. L'opérateur \hat{a}_ω étant l'opérateur d'annihilation lié à la fréquence ω , nous introduisons la notation

$$\hat{a}_+ = \hat{a}_{\omega_0+\Omega} \quad \hat{a}_- = \hat{a}_{\omega_0-\Omega} \quad (3.50)$$

afin de ne pas traîner de trop grands indices dans les développements qui suivent. Notons que typiquement les fréquences du laser et de l'onde gravitationnelle sont respectivement de l'ordre de $\omega_0 \approx 10^{15}$ Hz et $\Omega \approx 2\pi \cdot 100$ Hz et on utilisera donc fréquemment le fait que $\omega_0 \gg \Omega$. Le but de cette section étant de réécrire l'opérateur champ électrique sous une autre forme, rappelons son expression (3.8)

$$\hat{E}(z, t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 Ac}} \left(\hat{a}_\omega e^{-i\omega(t-z/c)} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega(t-z/c)} \right) d\omega. \quad (3.51)$$

Ensuite, afin de se conformer aux conventions de la communauté étudiant le bruit quantique dans les interféromètres, nous passons des unités du SI aux unités cgs. Dans notre cas, ceci implique de faire le changement $\sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \rightarrow 1$. De plus, nous intégrons un facteur $\sqrt{2\pi}$ dans les opérateurs d'annihilation et de création ainsi que dans le facteur juste après l'intégrale. On obtient donc

$$\hat{E}(z, t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{Ac}} \left(\hat{a}_\omega e^{-i\omega(t-z/c)} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega(t-z/c)} \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.52)$$

avec les relations de commutation

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad [\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}] = 0. \quad (3.53)$$

Nous allons à présent quelque peu modifier l'opérateur champ électrique à l'aide des opérateurs \hat{a}_\pm . Considérons le premier terme de (3.52) que l'on note \hat{E}^+ et sortons tout d'abord le facteur $C_0 = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}}$ de l'intégrale. Nous avons alors

$$\hat{E}^{(+)}(z, t) = \frac{C_0}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \hat{a}_\omega e^{-i\omega(t-z/c)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.54)$$

Ensuite, nous séparons le champ sur les fréquences latérales à la fréquence fixe ω_0 du laser³

$$\hat{E}^{(+)}(z, t) = \frac{C_0}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0(t-z/c)} \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0}} \hat{a}_+ e^{-i\Omega(t-z/c)} + \sqrt{\frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0}} \hat{a}_- e^{i\Omega(t-z/c)} \right) \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (3.55)$$

3. L'intégrale va ici jusqu'à l'infini et l'on pourrait donc penser que l'argument dans la racine du second terme devient négatif lorsque $\Omega \gg \omega_0$. Cependant, expérimentalement ω_0 est toujours plus grand que Ω et cet argument reste donc toujours positif.

Puisque $\omega_0 \gg \Omega$, on peut effectuer l'approximation $\sqrt{\frac{\omega_0 \pm \Omega}{\omega_0}} \approx 1$. Le second terme de (3.52) est l'hermitien conjugué du premier et on peut donc réécrire l'opérateur champ électrique comme

$$\hat{E}(z, t) = \frac{C_0}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \left[e^{-i\omega_0(t-z/c)} \left(\hat{a}_+ e^{-i\Omega(t-z/c)} + \hat{a}_- e^{i\Omega(t-z/c)} \right) + e^{i\omega_0(t-z/c)} \left(\hat{a}_+^\dagger e^{i\Omega(t-z/c)} + \hat{a}_-^\dagger e^{-i\Omega(t-z/c)} \right) \right] \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (3.56)$$

Il est alors possible de définir les opérateurs de quadrature à deux photons. En effet, on pose

$$\hat{a}_{c,2} = \frac{\hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \hat{a}_{s,2} = \frac{\hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad (3.57)$$

et on retrouve alors l'évolution de l'opérateur champ électrique selon les fonctions sinus et cosinus

$$\hat{E}(z, t) = C_0 \int_0^\infty \left[\cos(\omega_0(t-z/c)) \left(\hat{a}_{c,2} e^{-i\Omega(t-z/c)} + \hat{a}_{c,2}^\dagger e^{i\Omega(t-z/c)} \right) + \sin(\omega_0(t-z/c)) \left(\hat{a}_{s,2} e^{-i\Omega(t-z/c)} + \hat{a}_{s,2}^\dagger e^{i\Omega(t-z/c)} \right) \right] \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (3.58)$$

Les opérateurs $\hat{a}_{c,2}$ et $\hat{a}_{s,2}$ sont donc les opérateurs de quadrature dans le formalisme à deux photons. Ceux-ci étant combinaison linéaire des opérateurs de fréquences $\omega_0 \pm \Omega$, ils permettent de prendre en compte le phénomène d'intrication qui existe lors d'un processus de création à deux photons. On remarque que dans le cas dégénéré ($\Omega = 0$), on retrouve bien les opérateurs de quadrature $\hat{a}_{c,1}$ et $\hat{a}_{s,1}$. Pour la suite, nous n'utiliserons plus que ces opérateurs de quadrature à deux photons, l'indice 2 ne sera donc pas précisé systématiquement⁴. Les relations de commutation entre opérateurs de quadrature à deux photons sont obtenus à partir de (3.53).

On a

$$[\hat{a}_c(\Omega), \hat{a}_c^\dagger(\Omega')] = [\hat{a}_s(\Omega), \hat{a}_s^\dagger(\Omega')] = 2\pi \frac{\Omega}{\omega_0} \delta(\Omega - \Omega') \simeq 0 \quad (3.59)$$

$$[\hat{a}_s(\Omega), \hat{a}_c^\dagger(\Omega')] = [\hat{a}_c(\Omega), \hat{a}_s^\dagger(\Omega')] = 2i\pi \delta(\Omega - \Omega') \quad (3.60)$$

où on approxime la première relation de commutation à zéro. Cette approximation est justifiée dans le cadre de la détection des ondes gravitationnelles, où $\omega_0 \gg \Omega$. En effet, une telle relation de commutation non nulle induit du bruit quantique supplémentaire. Cependant, pour une onde gravitationnelle dotée d'une fréquence très élevée telle que 10 MHz, ce bruit supplémentaire est cinq ordres de grandeur plus petit que le bruit de grenaille [55]. Un tel effet est donc totalement négligeable.

3.4.2 Les états comprimés non dégénérés

Maintenant que nous avons un formalisme permettant de considérer des processus à deux photons, introduisons les états naturellement liés à ces processus : les états comprimés non dégénérés. A nouveau, on introduit une transformation de Bogoliubov pour chaque opérateur \hat{a}_\pm donnée par [43]

$$\hat{a}_+^{(R,\theta)} \equiv \hat{S}(R, \theta) \hat{a}_+ \hat{S}^\dagger(R, \theta) = \hat{a}_+ \cosh R + \hat{a}_-^\dagger e^{2i\theta} \sinh R \quad (3.61)$$

4. Le principe de la détection homodyne ne change pas fondamentalement dans le cas des opérateurs de quadrature à deux photons par rapport au développement effectué pour ceux à un photon. Nous considérons donc pour la suite qu'il est possible de mesurer $\hat{a}_{c,2}$ et $\hat{a}_{s,2}$ ou une combinaison de ceux-ci de la même manière qu'il est possible de le faire pour $\hat{a}_{c,1}$ et $\hat{a}_{s,1}$.

$$\hat{a}_-^{(R,\theta)} \equiv \hat{S}(R,\theta)\hat{a}_-\hat{S}^\dagger(R,\theta) = \hat{a}_- \cosh R + \hat{a}_+^\dagger e^{2i\theta} \sinh R \quad (3.62)$$

où l'opérateur de compression est ici défini comme

$$\hat{S}(R,\theta) \equiv \exp \left[R \left(\hat{a}_+\hat{a}_- e^{-2i\theta} - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger e^{2i\theta} \right) \right]. \quad (3.63)$$

On voit que les opérateurs relatifs aux fréquences $\omega_0 \pm \Omega$ sont mélangés dans les transformations (3.61) et (3.62). A nouveau, ceci permet de prendre en compte l'intrication des photons dans un état comprimé. Remarquons que nous n'avons pas décidé de prendre $\theta = 0$ comme nous l'avons fait dans le cas dégénéré⁵. Ceci nous servira lorsque nous discuterons des moyens permettant de dépasser la limite quantique standard. Ce paramètre θ est appelé l'angle de compression, nous expliciterons son effet un peu plus loin.

Soit l'état cohérent à deux modes, de fréquences $\omega_0 \pm \Omega$, donné par

$$|\alpha_+\rangle \otimes |\alpha_-\rangle \equiv |\alpha_+, \alpha_-\rangle. \quad (3.64)$$

L'état comprimé non dégénéré est obtenu à partir de cet état cohérent auquel on applique l'opérateur de compression $\hat{S}(R,\theta)$. On notera cet état comme suit

$$\hat{S}(R,\theta) |\alpha_+, \alpha_-\rangle \equiv |\alpha_+, \alpha_-, (R,\theta)\rangle. \quad (3.65)$$

Celui-ci est évidemment état propre des opérateurs $\hat{a}_\pm^{(R,\theta)}$, la valeur propre étant celle liée à la fréquence correspondante de l'opérateur. Autrement dit, on a

$$\hat{a}_+^{(R,\theta)} |\alpha_+, \alpha_-, (R,\theta)\rangle = \alpha_+ |\alpha_+, \alpha_-, (R,\theta)\rangle \quad (3.66)$$

$$\hat{a}_-^{(R,\theta)} |\alpha_+, \alpha_-, (R,\theta)\rangle = \alpha_- |\alpha_+, \alpha_-, (R,\theta)\rangle. \quad (3.67)$$

La discussion effectuée dans le cadre des états comprimés dégénérés reste qualitativement valable pour les états comprimés non dégénérés. Ce qui nous intéressera pour la suite, ce sera essentiellement le comportement des opérateurs de quadrature lors de l'utilisation d'états comprimés dans l'interféromètre. Nous aimerions donc exprimer ceux-ci à l'aide des opérateurs $\hat{a}_\pm^{(R,\theta)}$. Pour cela, on multiplie (3.61) par $\cosh R$ et l'hermitien conjugué de (3.62) par $\sinh R$. En prenant la différence du premier résultat avec le second, on obtient

$$\hat{a}_+ = \hat{a}_+^{(R,\theta)} \cosh R - \left(\hat{a}_-^{(R,\theta)} \right)^\dagger e^{2i\theta} \sinh R. \quad (3.68)$$

De même, en multipliant (3.61) par $\sinh R$ et l'hermitien conjugué de (3.62) par $\cosh R$ et en prenant la différence du second résultat avec le premier, on obtient

$$\hat{a}_-^\dagger = \left(\hat{a}_-^{(R,\theta)} \right)^\dagger \cosh R - \hat{a}_+^{(R,\theta)} e^{-2i\theta} \sinh R. \quad (3.69)$$

Connaissant l'expression des opérateurs de quadrature exprimée dans (3.57) et à l'aide des deux expressions obtenues juste avant, on trouve

$$\hat{a}_c = \left(\frac{\hat{a}_+^{(R,\theta)} + \left(\hat{a}_-^{(R,\theta)} \right)^\dagger}{\sqrt{2}} \right) (\cosh R - \cos 2\theta \sinh R) - \left(\frac{\hat{a}_+^{(R,\theta)} - \left(\hat{a}_-^{(R,\theta)} \right)^\dagger}{i\sqrt{2}} \right) \sin 2\theta \sinh R \quad (3.70)$$

5. Nous avons deux angles θ_1 et θ_2 dans le cas des états comprimés dégénérés. On peut se ramener au cas à un seul angle en mettant simplement un facteur de phase global en évidence. Puisque l'on ne considérera pas de superposition d'états comprimés, ce facteur global est physiquement inutile et on peut donc le supprimer.

$$\hat{a}_s = \left(\frac{\hat{a}_+^{(R,\theta)} - (\hat{a}_-^{(R,\theta)})^\dagger}{i\sqrt{2}} \right) (\cosh R + \cos 2\theta \sinh R) - \left(\frac{\hat{a}_+^{(R,\theta)} + (\hat{a}_-^{(R,\theta)})^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \sin 2\theta \sinh R. \quad (3.71)$$

Notons que les opérateurs dans les membres de droite sont en fait les opérateurs de quadrature comprimés $\hat{a}_c^{(R,\theta)}$ et $\hat{a}_s^{(R,\theta)}$. En effet, on vérifie aisément que

$$\hat{a}_c^{(R,\theta)} = \hat{S}(R, \theta) \hat{a}_c \hat{S}^\dagger(R, \theta) = \left(\frac{\hat{a}_+^{(R,\theta)} + (\hat{a}_-^{(R,\theta)})^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.72)$$

$$\hat{a}_s^{(R,\theta)} = \hat{S}(R, \theta) \hat{a}_s \hat{S}^\dagger(R, \theta) = \left(\frac{\hat{a}_+^{(R,\theta)} - (\hat{a}_-^{(R,\theta)})^\dagger}{i\sqrt{2}} \right). \quad (3.73)$$

A l'aide des transformations de Bogoliubov ou en manipulant les expressions (3.70) et (3.71), il est possible d'exprimer les opérateurs de quadrature comprimés selon les opérateurs de quadrature habituels. On obtient

$$\hat{a}_c^{(R,\theta)} = \hat{a}_c (\cosh R + \cos 2\theta \sinh R) + \hat{a}_s \sin 2\theta \sinh R \quad (3.74)$$

$$\hat{a}_s^{(R,\theta)} = \hat{a}_s (\cosh R - \cos 2\theta \sinh R) + \hat{a}_c \sin 2\theta \sinh R. \quad (3.75)$$

Lorsque l'on utilise les états comprimés, on a donc deux choix. Soit adopter le point de vue de Schrödinger et considérer que c'est l'état quantique qui est comprimé et que les opérateurs de quadratures sont inchangés. On utilise alors l'état $|\alpha_+, \alpha_-, (R, \theta)\rangle$ et les opérateurs \hat{a}_c et \hat{a}_s . Soit adopter le point de vue de Heisenberg, l'état quantique $|\alpha_+, \alpha_-\rangle$ ne change pas et ce sont les opérateurs de quadrature qui sont comprimés et donc donnés par $\hat{a}_c^{(R,\theta)}$ et $\hat{a}_s^{(R,\theta)}$. Les résultats physiques obtenus dans chaque cas sont bien évidemment les mêmes.

Afin de déterminer les incertitudes sur la mesure d'un des opérateurs de quadrature, il faut utiliser un autre outil que la variance car nous sommes passés dans le domaine fréquentiel pour que nos opérateurs dépendent de la fréquence Ω d'une onde gravitationnelle. Cet outil est bien connu dans le cadre de l'analyse de données puisque c'est la densité spectrale de puissance notée S . La variance d'un opérateur quantique \hat{o} défini dans le domaine temporel est liée à la densité spectrale S_o de l'opérateur \hat{o} défini dans le domaine fréquentiel au travers de [8]

$$(\Delta \hat{o})^2 = \int_0^\infty S_o(\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (3.76)$$

La variance est donc simplement la somme des densités spectrales à toutes les fréquences du spectre continu. Dans notre cas, cette densité spectrale va nous donner la puissance du signal que le bruit quantique va induire dans l'interféromètre pour chaque fréquence Ω d'une onde gravitationnelle. Le meilleur cas serait donc quand la densité spectrale est nulle à toutes les fréquences puisqu'alors aucun signal parasite dû au bruit quantique ne serait mesuré. Notons que l'analyse du signal d'une onde gravitationnelle passe aussi par sa densité spectrale de puissance. Il est donc aisé de savoir si un bruit à une certaine fréquence permet ou non de détecter une onde gravitationnelle ayant une fréquence Ω . Si la densité spectrale du bruit est plus élevée que la densité spectrale du signal de l'onde gravitationnelle, il y a de fortes chances pour que cette onde ne soit pas détectée. Dans la suite, afin de distinguer la densité spectrale de puissance liée au bruit de celle liée au signal d'une onde gravitationnelle, nous nommerons cette première densité spectrale de bruit.

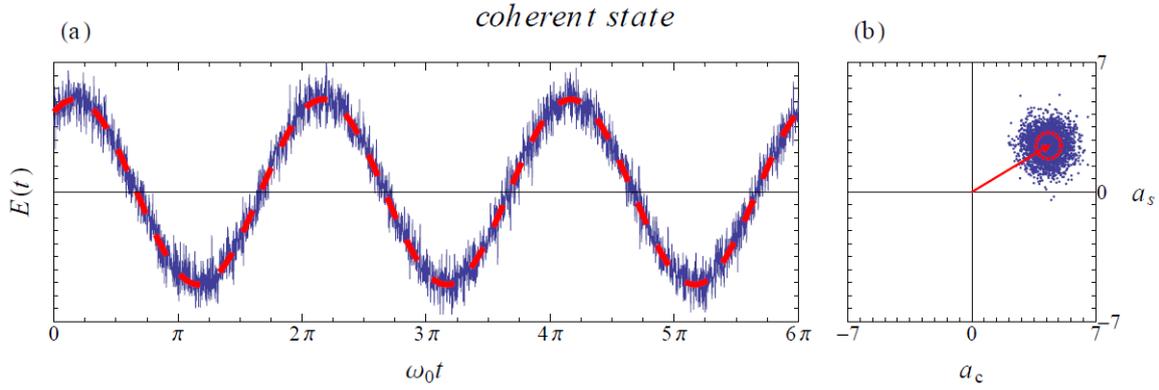


FIGURE 3.6 – A gauche, on représente le champ électrique selon sa phase dans le cas d'un état cohérent. Comme précisé précédemment, l'état cohérent peut être vu comme un champ électrique classique auquel on ajoute des fluctuations quantiques du vide. A droite, on retrouve le schéma de l'ellipse sur un bâton dans l'espace des quadratures pour cet état cohérent. La mesure la plus probable qui est la moyenne de l'opérateur champ électrique se trouve au milieu du cercle représenté par une flèche. Ensuite, le cercle s'amenuise sur les bords car les valeurs extrêmes ont moins de chance d'être observées. La variance des deux opérateurs étant la même, l'ellipse se réduit à un cercle. [8].

Passons à la définition mathématique de cette densité spectrale [56]. Pour deux opérateurs quantiques $\hat{o}_1(\Omega)$ et $\hat{o}_2(\Omega)$ s'appliquant sur un état $|\psi\rangle$, on définit la densité spectrale de bruit comme

$$\pi S_{\hat{o}_1\hat{o}_2}(\Omega)\delta(\Omega - \Omega') = \langle \psi | \hat{o}_1(\Omega)\hat{o}_2^\dagger(\Omega') + \hat{o}_2^\dagger(\Omega')\hat{o}_1(\Omega) | \psi \rangle. \quad (3.77)$$

Le fait de définir cette densité sur deux opérateurs permet de prendre en compte les corrélations pouvant exister entre eux. Nous allons voir que de telles corrélations existent pour les états comprimés. Pour l'opérateur \hat{a}_c dans l'état du vide, en tenant compte du fait que $[\hat{a}_{\omega_0+\Omega}, \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^\dagger] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega')$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi S_{\hat{a}_c\hat{a}_c}(\Omega - \Omega') &= \langle 0 | \hat{a}_c(\Omega)\hat{a}_c^\dagger(\Omega') + \hat{a}_c^\dagger(\Omega')\hat{a}_c(\Omega) | 0 \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \\ &\Leftrightarrow S_{\hat{a}_c\hat{a}_c} \equiv S_{cc} = 1. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Puisque l'on a trois autres densités à calculer, on préfère généralement introduire la matrice des densités spectrales de bruit. Pour nos deux opérateurs de quadrature \hat{a}_c et \hat{a}_s dans l'état du vide, on a

$$\begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cs} \\ S_{sc} & S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Le bruit sur les deux quadratures ont ainsi la même intensité puisque leurs densités spectrales de bruit sont égales. Considérons à présent un état du vide comprimé $|0, (R, \theta)\rangle$ de facteur de compression R positif et d'angle de compression $\theta = 0$. Sachant que $S_{cc} = S_{ss} = 1$ dans le cas du vide et en s'appuyant sur l'effet d'une compression sur les opérateurs de quadrature donné dans (3.74) et (3.75), on obtient aisément la matrice

$$\begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cs} \\ S_{sc} & S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2R} & 0 \\ 0 & e^{-2R} \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

On voit qu'aucune corrélation n'est créée entre opérateurs de quadrature. De plus, on retrouve l'effet déjà observé dans le cas des états comprimés non dégénérés où le bruit sur la quadrature \hat{a}_c est augmenté alors que le bruit sur la quadrature \hat{a}_s est diminué. Nous avons donc bien affaire à des états comprimés. Pour avoir une compression sur l'opérateur de quadrature \hat{a}_c , soit on

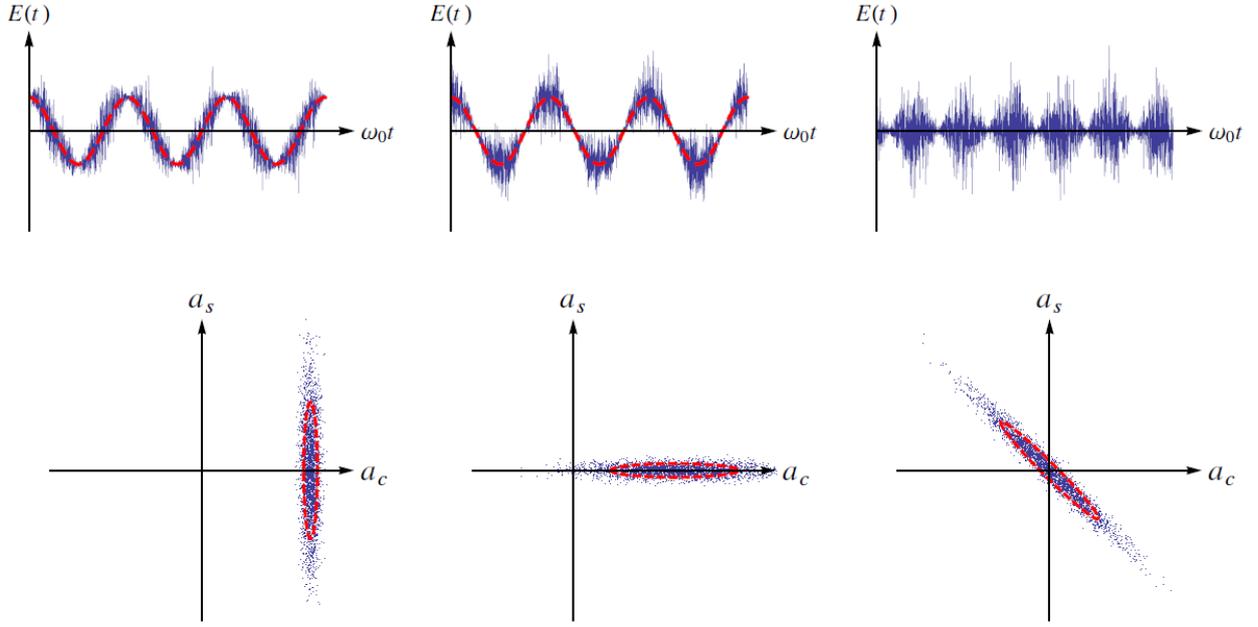


FIGURE 3.7 – Représentations des champs électriques selon leur phase et schémas correspondants de l’ellipse sur un bâton, selon plusieurs compressions différentes à 10 dB. A gauche, on a un état comprimé non vide avec un angle de compression $\theta = \pi/2$. On voit clairement, en dessous, que les mesures éloignées de la valeur moyenne sont beaucoup moins probables sur \hat{a}_c par rapport à l’état cohérent de la Figure 3.6. Ceci se faisant au détriment du bruit présent sur la quadrature \hat{a}_s . De plus, on remarque à nouveau que le champ électrique a une variance dépendante du temps dans le cas des états comprimés selon la quadrature sur laquelle il passe. Au milieu, l’angle de compression est $\theta = 0$, on voit donc qu’on a l’effet inverse que le cas précédent. Enfin à droite, on a un état comprimé du vide avec un angle $\theta = \pi/4$. On voit que θ correspond bien à un certain angle formé par l’axe principal de l’ellipse et l’axe des ordonnées, d’où son nom d’angle de compression. La compression n’est plus aussi simple que dans les deux cas précédents, ceci étant dû aux corrélations induites entre opérateurs de quadrature [8].

considère un R négatif, soit on garde ce dernier positif et on considère un angle $\theta = \pi/2$. De manière générale, la deuxième option est privilégiée, on a donc

$$\begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cs} \\ S_{sc} & S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2R} & 0 \\ 0 & e^{2R} \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Enfin, considérons le cas le plus général, celui où l’angle de compression est quelconque. A nouveau, en utilisant (3.74) et (3.75), on obtient la matrice des densités spectrales dans l’état $|0, (R, \theta)\rangle$

$$\begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cs} \\ S_{sc} & S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2R} - 4 \cosh R \sinh R \sin^2 \theta & 2 \cosh R \sinh R \sin 2\theta \\ 2 \cosh R \sinh R \sin 2\theta & e^{-2R} + 4 \cosh R \sinh R \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

On remarque que l’angle de compression induit des corrélations dans les bruits des opérateurs de quadrature. Nous verrons que dans le cadre de la réduction du bruit quantique, ces corrélations sont très importantes et sont le coeur même de l’utilité des états comprimés dans les interféromètres à venir.

Pour donner une représentation graphique de chacun des cas que l’on vient de voir, on peut introduire ce que l’on appelle l’image de l’ellipse sur un bâton (voir Figures 3.6 et 3.7). Celle-ci prend place dans l’espace des phases induit par les opérateurs de quadrature \hat{a}_c et \hat{a}_s et peut

être vu comme la projection de la fonction de Wigner sur le plan de cet espace des phases⁶. Afin de tenir compte du fait que toutes les valeurs mesurables n'ont pas la même probabilité, on dessine une ellipse (ou un cercle dans le cas de l'état cohérent) dont les bords s'amenuisent afin de tenir compte du fait que des valeurs éloignées de la moyenne ont une probabilité moindre d'être observées.

Nous nous sommes longuement épanchés sur les états comprimés. Cela n'a pas été fait en vain. En effet, nous verrons qu'à l'aide des matrices de densités spectrales déterminées précédemment, nous pourrions très rapidement inclure les effets de l'utilisation des états comprimés sur le bruit quantique dans l'interféromètre Michelson.

6. Il faut cependant faire attention car la fonction de Wigner est une fonction de quasiprobabilité. Elle peut en fait prendre des valeurs négatives et sa projection sur un plan n'a alors plus beaucoup de sens puisque les valeurs positives et négatives sont alors mises sur un même pied. Toutefois, dans le cas des états cohérents et comprimés, la fonction de Wigner est toujours positive.

Chapitre 4

Le bruit quantique et la limite quantique standard

4.1 Traitement quantique de l'interféromètre Michelson

Venons-en à présent au coeur du sujet de ce travail, le calcul du bruit quantique. Durant les années 1970, une controverse est née pour savoir d'où provient le bruit de pression de radiation dans l'interféromètre. Rainer Weiss avait postulé que ce sont les fluctuations de l'état cohérent venant du laser qui produisent des différences dans le mouvement des miroirs [57]. Ces fluctuations venant du port symétrique, elles ne doivent normalement pas induire de différence de chemin entre les bras de l'interféromètre car leurs effets sont identiques sur chaque miroir. Cependant, Weiss avançait que la symétrie n'est pas parfaite et que le bruit vient bien du laser. L'argument n'était cependant pas convaincant, si bien que l'origine du bruit quantique restait un mystère.

C'est finalement Carlton Caves, en 1980, qui a résolu cette énigme en effectuant un développement quantique de l'interféromètre [58]. Il a alors mis en évidence que le bruit quantique (aussi bien le bruit de pression de radiation que le bruit de grenaille) provient plutôt des fluctuations de l'état du vide rentrant par le port antisymétrique et se superposant à l'état cohérent du laser (voir [59] pour son article plus détaillé). C'est donc le vide qui sera la principale source de bruit dans la prochaine génération d'interféromètre !

Pour démontrer cela, nous nous baserons sur un développement plus récent qui est à présent utilisé comme base pour tous les calculs des différentes configurations de l'interféromètre [60]. Cependant, contrairement à cet article, nous omettrons d'inclure les pertes optiques qui peuvent survenir durant la propagation du champ électrique dans l'instrument. Pour une réelle estimation du bruit quantique, ces pertes sont évidemment à prendre en compte, toutefois, elles ne nous seront conceptuellement d'aucune utilité pour la suite.

4.1.1 Les champs dans l'interféromètre

Considérons un interféromètre Michelson muni de cavités Fabry-Perot dans le but d'augmenter l'intensité lumineuse dans les bras. Afin de bien cerner d'où viennent les différents bruits quantiques, nous devons déterminer la forme que prend le champ électromagnétique à la sortie de l'interféromètre en fonction de ceux entrant dans celui-ci. Pour cela, il va donc falloir partir de ces champs entrants et suivre pas à pas leur évolution et leur interaction avec les différents composants optiques. Notons que nous ne considérerons les champs qu'à des positions précises dans l'interféromètre, ainsi seule la variation temporelle des opérateurs sera explicitement exprimée. La variation spatiale sera ponctuellement décrite à l'aide d'une certaine phase liée à la longueur des cavités. Enfin, contrairement au cas classique, il y a ici deux champs qui entrent

dans l'interféromètre, le laser provenant du port symétrique mais aussi l'état du vide venant du port antisymétrique.

Commençons par l'état du vide. L'opérateur permettant de décrire ce champ qui se propage dans l'interféromètre est l'opérateur champ électrique à deux photons que l'on réécrit ici sous la forme

$$\hat{E}(t) = C_0 \int_0^\infty \left[\cos(\omega_0 t) (\hat{a}_c e^{-i\Omega t} + \hat{a}_c^\dagger e^{i\Omega t}) + \sin(\omega_0 t) (\hat{a}_s e^{-i\Omega t} + \hat{a}_s^\dagger e^{i\Omega t}) \right] \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (4.1)$$

où, pour rappel, $C_0 = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{Ac}}$. Dans la suite, afin de différencier les champs quantiques présents dans les différentes parties de l'interféromètre, nous utiliserons différentes lettres pour désigner les opérateurs de quadrature \hat{a}_c et \hat{a}_s . L'état du vide entrant par le port antisymétrique est donc décrit par les opérateurs \hat{a}_c et \hat{a}_s tandis que le laser entrant par le port symétrique sera décrit par les opérateurs \hat{d}_c et \hat{d}_s .

Passons à présent au champ électrique provenant du laser. Celui-ci est dans un état cohérent que l'on qualifie de quasi-classique car son intensité est très élevée. Comme nous l'avons précisé, un état cohérent peut être vu comme un état du vide muni de ses fluctuations quantiques, auquel on ajoute une amplitude classique. Suivant ceci, nous séparons l'opérateur champ électrique \hat{E}_{laser} en deux termes, le premier donnant sa valeur moyenne classique et le second représentant ses fluctuations quantiques, autrement dit

$$\hat{E}_{\text{laser}} = \langle \hat{E}_{\text{laser}} \rangle + \delta \hat{E}_{\text{laser}}. \quad (4.2)$$

L'intensité du laser qui permet d'obtenir la partie classique est donnée par

$$I_0 = \frac{Ac}{4\pi} \overline{\langle \hat{E}_{\text{laser}} \rangle^2} \quad (4.3)$$

où la barre supérieure signifie que l'on prend la moyenne sur plusieurs périodes du champ. Le laser est de fréquence ω_0 et en se rappelant que la partie réelle du champ électrique dans le cas d'un état cohérent se situe sur sa quadrature en cosinus, on voit que

$$\langle \hat{E}_{\text{laser}} \rangle = \sqrt{2} C_0 D \cos(\omega_0 t) \quad (4.4)$$

où $D = \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega_0}}$, vérifie bien l'équation (4.3)¹. Ce champ classique d'intensité I_0 est appelé le champ porteur. Les fluctuations du vide s'ajoutant à cette partie classique prennent la forme (4.1). On obtient donc comme opérateur champ électrique pour le laser

$$\hat{E}_{\text{laser}} = C_0 \left[\cos(\omega_0 t) \left(\sqrt{2} D + \int_0^{+\infty} (\hat{d}_c e^{-i\Omega t} + \hat{d}_c^\dagger e^{i\Omega t}) \frac{d\Omega}{2\pi} \right) + \sin(\omega_0 t) \int_0^{+\infty} (\hat{d}_s e^{-i\Omega t} + \hat{d}_s^\dagger e^{i\Omega t}) \frac{d\Omega}{2\pi} \right]. \quad (4.5)$$

Nous voyons que ce champ est bien le même que pour l'état du vide entrant par le port antisymétrique mais auquel on rajoute une partie classique de fréquence ω_0 . Remarquons ici que déterminer les opérateurs de quadrature d'un champ revient à déterminer le champ lui-même. Nous ne traînerons donc pas toutes les intégrales tout au long des calculs mais nous nous concentrerons seulement sur ces opérateurs. Pour la suite, nous ajouterons un indice supérieur n ou e selon que l'on parle du champ électrique dans le bras nord ou est de l'interféromètre.

1. La valeur moyenne d'un cosinus carré sur une période est 1/2.

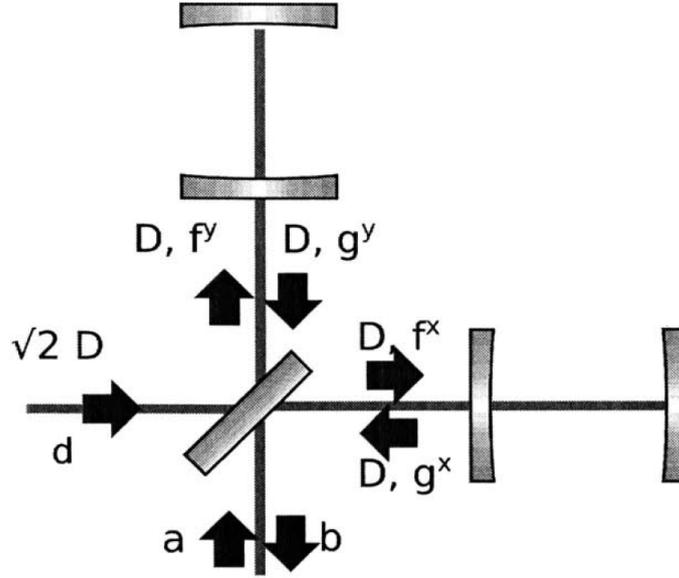


FIGURE 4.1 – Dénominations des différents opérateurs au niveau de la lame séparatrice [54].

La lame séparatrice

Nous avons donc nos deux champs de départ ; voyons comment ils vont évoluer dans l'interféromètre. Le premier élément avec lequel ceux-ci vont interagir est la lame séparatrice. A la sortie de celle-ci, le champ porteur est séparé en deux, une partie allant dans le bras nord et l'autre dans le bras est. Son intensité est ainsi divisée par 2 et son amplitude par $\sqrt{2}$. Le champ porteur est donc donné après son passage dans la lame séparatrice par

$$\langle \hat{E}_{\text{laser}}^{n,e} \rangle = C_0 D \cos(\omega_0 t). \quad (4.6)$$

Pour les champs quantiques, la lame séparatrice va mélanger les opérateurs de quadrature des champs venant des ports symétrique et antisymétrique. Ainsi, le champ électrique quantifié, défini par les opérateurs de quadrature \hat{f}_c et \hat{f}_s , présent dans la cavité entre la lame séparatrice et le premier miroir de la cavité Fabry-Perot est donné au nord et à l'est par (voir Figure 4.1 pour la dénomination des différents champs au niveau de la lame séparatrice) [60]

$$\hat{f}_j^n = \frac{\hat{d}_j + \hat{a}_j}{\sqrt{2}} \quad \hat{f}_j^e = \frac{\hat{d}_j - \hat{a}_j}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

L'indice $j = c, s$ permet de différencier les opérateurs de quadrature \hat{a}_c et \hat{a}_s . Ce sera tout pour la lame séparatrice, la prochaine étape étant de faire passer ces champs dans les cavités Fabry-Perot.

Les cavités Fabry-Perot

Désignons les miroirs à l'avant et au bout de la cavité Fabry-Perot comme étant respectivement le miroir intérieur et le miroir extérieur. Notons R et T les coefficients de réflectivité et de transmissivité des miroirs intérieurs des deux cavités Fabry-Perot. Nous considérerons que les miroirs extérieurs sont absolument réfléchissants et que donc $R = 1$ et $T = 0$. Ceci est en accord avec l'expérience puisque les miroirs extérieurs sont extrêmement réfléchissants afin de ne pas laisser la lumière s'échapper hors de l'interféromètre. Quoiqu'il en soit, les miroirs intérieurs ont tout de même un coefficient de réflectivité très élevé afin de maximiser le nombre d'aller-retours effectués par la lumière et nous avons donc $R \gg T$. Enfin, notons que le développement pour

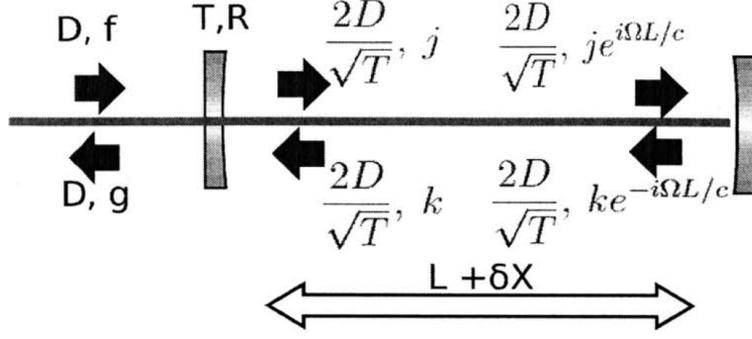


FIGURE 4.2 – Dénominations des différents opérateurs dans une cavité Fabry-Perot [54].

une cavité Fabry-Perot tient aussi pour l'autre. Nous ne précisons donc pas si nous sommes dans le bras nord ou est.

Une fois passé le miroir intérieur, le champ porteur est donné par

$$\langle \hat{E}_{\text{laser}}^{n,e} \rangle = C_0 \frac{2D}{\sqrt{T}} \cos(\omega_0 t). \quad (4.8)$$

Un coefficient de résonance $2/\sqrt{T}$ a été introduit afin de tenir compte de l'amplification due à la cavité. Pour simplifier, nous ajustons la longueur initiale L des cavités Fabry-Perot de telle sorte que celle-ci soit un nombre entier de longueur d'onde du champ porteur de fréquence ω_0 . Ce dernier n'acquiert donc pas de déphasage de par son passage dans les bras de l'instrument, en l'absence d'ondes gravitationnelles.

Pour ce qui est des opérateurs de quadrature, introduisons \hat{j}_j les opérateurs du champ se déplaçant vers le fond de la cavité Fabry-Perot. Définissons en même temps les opérateurs \hat{k}_j du champ se déplaçant vers l'avant de la cavité (voir Figure 4.2). Les opérateurs \hat{j}_j sont donnés par la somme du champ venant de la lame séparatrice, représenté par les \hat{f}_j , et du champ se réfléchissant sur le miroir intérieur, donc représenté par les \hat{k}_j . En prenant en compte les coefficients de réflexivité et de transmissivité du miroir, on a

$$\hat{j}_j = \sqrt{T} \hat{f}_j + \sqrt{R} \hat{k}_j. \quad (4.9)$$

Contrairement au champ porteur, les champs donnés par \hat{j}_j et \hat{k}_j étant de fréquences $\omega_0 \pm \Omega$, ils vont acquérir une phase relative due à leur propagation dans les bras de l'interféromètre. Ainsi, au miroir extérieur, les opérateurs de quadrature deviennent

$$\hat{j}_j \rightarrow \hat{j}_j e^{i\Omega L/c} \quad \hat{k}_j \rightarrow \hat{k}_j e^{-i\Omega L/c}. \quad (4.10)$$

Un signe négatif apparaît sur la phase des \hat{k}_j car le champ se déplace dans le sens inverse des \hat{j}_j . Enfin, le champ donné par les \hat{j}_j se réfléchit sur le miroir extérieur absolument réfléchissant et nous avons donc²

$$\hat{k}_j e^{-i\Omega L/c} = \hat{j}_j e^{i\Omega L/c}. \quad (4.11)$$

En l'état, nous avons déterminé les champs électriques se déplaçant dans la cavité Fabry-Perot. Cependant, nous n'avons pas pris en compte que la longueur des bras de l'interféromètre pouvait évoluer au cours du temps. Voyons donc ce qu'une telle évolution peut induire comme effet.

2. On peut ici considérer les pertes optiques dues à l'état du vide rentrant dans la cavité au travers du miroir extérieur [60]. Cependant, nous ne prendrons pas en compte cet effet afin de ne pas alourdir le calcul.

Effet du passage d'une onde gravitationnelle

Introduisons $X(t)$, le changement de longueur d'une cavité Fabry-Perot dû au passage d'une onde gravitationnelle d'amplitude $h(t)$. De la forme de l'onde gravitationnelle dans la jauge TT donnée par (1.9) et du changement de longueur d'un bras donné par (1.16), on obtient

$$X^n(t) = \frac{1}{2}h(t)L \quad X^e(t) = -\frac{1}{2}h(t)L. \quad (4.12)$$

Précédemment, nous avons choisi la longueur de la cavité Fabry-Perot de telle sorte que le champ porteur n'acquière pas de phase relative lors de son déplacement. Cependant, la distance $2X(t)$ (un $X(t)$ à l'aller et un au retour) supplémentaire que le champ porteur doit parcourir n'a aucune raison d'être conforme à cette règle. Cette modification de la longueur des bras de l'interféromètre va donc induire une phase dans le champ porteur. Juste après que celui-ci se soit réfléchi sur le miroir et qu'il soit retourné à la position initiale du miroir, le champ porteur sera donné par

$$\langle \hat{E}_{\text{laser}}^{n,e} \rangle = C_0 \frac{2D}{\sqrt{T}} \cos(\omega_0(t - 2X(t)/c)). \quad (4.13)$$

La quantité $X(t)$ étant extrêmement faible (le millième de la taille d'un proton), nous pouvons effectuer un développement limité du cosinus, et en introduisant la transformée de Fourier de $X(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}_{\text{laser}}^{n,e} \rangle &\simeq C_0 \frac{2D}{\sqrt{T}} \left(\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \frac{2\omega_0}{c} X(t) \right) \\ &= C_0 \frac{2D}{\sqrt{T}} \left(\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \frac{2\omega_0}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ce développement limité fait apparaître une dépendance en sinus dans la partie classique du champ électrique. Or, le champ électrique classique ne peut avoir qu'une dépendance en cosinus. Pour remédier à cela, nous allons faire passer le terme ayant une dépendance en sinus sur les opérateurs de quadrature présents dans la cavité. Puisque l'effet d'un changement de longueur se fait sentir sur le champ porteur après réflexion au niveau du miroir extérieur, nous allons considérer le champ quantique se trouvant en cet endroit. Autrement dit celui relatif aux opérateurs de quadrature \hat{k}_j . Exprimons donc ce champ, noté \hat{E}_k , dans son entièreté

$$\hat{E}_k(t) = C_0 \int_0^\infty \left[\cos(\omega_0 t) \left(\hat{k}_c e^{-i\Omega t} + \hat{k}_c^\dagger e^{i\Omega t} \right) + \sin(\omega_0 t) \left(\hat{k}_s e^{-i\Omega t} + \hat{k}_s^\dagger e^{i\Omega t} \right) \right] \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (4.15)$$

Par identification, en comparant (4.14) et (4.15), on voit que la dépendance sinusoïdale du champ classique peut en effet être transférée sur les opérateurs de quadrature du champ \hat{E}_k au travers des contributions

$$\delta k_c = 0 \quad \delta k_s = \frac{2D}{\sqrt{T}} \frac{2\omega_0}{c} X(\Omega) = \frac{4}{c} \sqrt{\frac{I_0 \omega_0}{\hbar T}} X(\Omega). \quad (4.16)$$

Enfin, pour obtenir les opérateurs \hat{k}_j , il suffit de rajouter ces δk_j à l'équation (4.11) que l'on a définie au niveau du miroir extérieur. On obtient alors

$$\hat{k}_j e^{-i\Omega L/c} = \hat{j}_j e^{i\Omega L/c} + \delta k_j. \quad (4.17)$$

Physiquement, ceci traduit la création des bandes latérales de fréquences $\omega_0 \pm \Omega$ qui avaient justifiée l'introduction du formalisme à deux photons. C'est ce report d'intensité du champ porteur sur le champ \hat{E}_k qui va permettre de mesurer le mouvement des miroirs de l'interféromètre et donc de détecter l'onde gravitationnelle.

Sortie de la cavité Fabry-Perot

Voyons donc de quelle manière ces bandes latérales vont arriver au port antisymétrique. Notons \hat{g}_j les opérateurs de quadrature du champ sortant de la cavité Fabry-Perot (voir Figure 4.2). A nouveau, en tenant compte des coefficients de réflexivité et de transmissivité du miroir intérieur, nous avons

$$\hat{g}_j = -\sqrt{R}\hat{f}_j + \sqrt{T}\hat{k}_j. \quad (4.18)$$

Les opérateurs \hat{f}_j sont connus car directement donnés par les champs venant des ports symétrique et antisymétrique (voir (4.7)). Par contre, les \hat{k}_j ne sont pas directement reliés à ces champs et il faut donc manipuler (4.18) afin qu'ils ne soient exprimés qu'au travers des \hat{f}_j et du signal de l'onde gravitationnelle donnée par les δk_j . Pour cela, on prend l'équation (4.17) et on remplace \hat{j}_j par son expression dans (4.9). En isolant les opérateurs \hat{k}_j , on obtient alors

$$\hat{k}_j = \frac{\sqrt{TR}e^{2i\Omega L/c}\hat{f}_j + \delta k_j e^{i\Omega L/c}}{1 - \sqrt{R}e^{2i\Omega L/c}}. \quad (4.19)$$

En injectant cette équation dans (4.18) et en se rappelant que $R + T = 1$, on obtient

$$\hat{g}_j = \frac{e^{2i\Omega L/c} - \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}e^{2i\Omega L/c}}\hat{f}_j + \frac{\sqrt{T}e^{i\Omega L/c}}{1 - \sqrt{R}e^{2i\Omega L/c}}\delta k_j. \quad (4.20)$$

Le coefficient de réflexivité des miroirs $R = 1 - T$ étant très proche de l'unité et puisque $\frac{\Omega L}{c} \ll 1$, on peut faire les approximations suivantes en ne gardant que les termes du premier ordre

$$\sqrt{R}e^{i\Omega L/c} \simeq 1 \quad 1 - \sqrt{R}e^{2i\Omega L/c} \simeq 1 - [(1 - T/2)(1 + 2i\Omega L/c)] \simeq \frac{2L}{c}(\gamma - i\Omega) \quad (4.21)$$

avec $\gamma = \frac{Tc}{4L}$ que l'on appelle la demi-largeur de bande de la cavité Fabry-Perot. En utilisant ces approximations, on trouve

$$\hat{g}_j \simeq \hat{f}_j e^{2i\beta} + \sqrt{\frac{(c/2L)^2 T}{\gamma^2 + \Omega^2}} e^{i\beta} \delta k_j. \quad (4.22)$$

où $\beta \equiv \arctan(\Omega/\gamma)$. On voit que les champs de fréquence $\omega_0 \pm \Omega$ acquièrent une phase $2i\beta$ lors de leur passage dans les cavités Fabry-Perot. Remarquons que le terme donnant le signal de l'onde gravitationnelle évolue comme $\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}^{-1}$. Dans le cas où $\Omega \gg \gamma$, ce terme est ainsi atténué par un facteur $1/\Omega$. L'interféromètre agit donc comme un filtre passe-bas sur la fréquence Ω des ondes gravitationnelles.

La lame séparatrice : le retour

Finalement, à l'aide des \hat{g}_j venant des bras nord et est, on peut déterminer les opérateurs de quadrature \hat{b}_j du champ sortant de l'interféromètre par le port antisymétrique. En effet, le passage par la lame séparatrice nous donne

$$\hat{b}_j = \frac{\hat{g}_j^n - \hat{g}_j^e}{\sqrt{2}}. \quad (4.23)$$

En utilisant l'expression des \hat{f}_j (4.7), des δk_j (4.16), des \hat{g}_j (4.22) ainsi que les changements de longueur des bras dû au passage d'une onde gravitationnelle (4.12), on obtient

$$\hat{b}_c = \frac{(\hat{f}_c^n - \hat{f}_c^e)e^{2i\beta}}{\sqrt{2}} = \hat{a}_c e^{2i\beta} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\hat{b}_s &= \frac{(\hat{f}_s^n - \hat{f}_s^e) e^{2i\beta}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{(c/2L)^2 T}{\gamma^2 + \Omega^2}} \frac{(\delta k_s^n - \delta k_s^e) e^{i\beta}}{\sqrt{2}} \\
&= \hat{a}_s e^{2i\beta} + \frac{\sqrt{2}}{L} e^{i\beta} \sqrt{\frac{I_0 \omega_0}{\hbar(\gamma^2 + \Omega^2)}} (X^n(\Omega) - X^e(\Omega)) \\
&= \hat{a}_s e^{2i\beta} + \sqrt{2} e^{i\beta} \sqrt{\frac{I_0 \omega_0}{\hbar(\gamma^2 + \Omega^2)}} h(\Omega)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

où $h(\Omega)$ sont les coefficients de la transformée de Fourier de $h(t)$. Ces quadratures \hat{b}_j sont celles du champ mesurable par photodétection et vont donc nous permettre de déterminer la forme du bruit quantique. Voyons ce que l'on peut tirer de cette expression. Tout d'abord, on voit que le signal d'une onde gravitationnelle n'apparaît que sur le second terme de \hat{b}_s . Il semble donc judicieux de mesurer cette quadrature à l'aide de la détection homodyne. Au niveau du bruit quantique, comme nous n'avons pas encore introduit le bruit de pression de radiation, le premier terme de chacune des quadratures va donc donner lieu au bruit de grenaille. L'état lié à l'opérateur \hat{a}_s entrant par le port antisymétrique étant l'état du vide, la densité spectrale du bruit de grenaille est

$$S_{bg} = S_{ss} = 1. \tag{4.26}$$

où l'indice bg signifie bruit de grenaille. Comme nous l'avions annoncé, ce sont bien les fluctuations du vide qui induisent le bruit de grenaille! Remarquons que ce bruit ne dépend ni de la fréquence Ω de l'onde gravitationnelle ni de l'intensité I_0 du laser arrivant sur la lame séparatrice. Cependant, lors d'une mesure, c'est le rapport bruit/signal qui nous intéresse. En effet, si l'on arrive à augmenter le signal mais que le bruit augmente d'une manière similaire, la précision de notre mesure n'en sera pas meilleure. Pour déterminer ce rapport, on définit la fonction de transfert \mathcal{T} . Cette fonction est souvent utilisée dans la description des amplificateurs linéaires, dont fait partie l'interféromètre Michelson [61]. Celle-ci permet de quantifier la réponse fréquentielle d'un instrument au phénomène physique mesuré. Dans notre cas, on a

$$\mathcal{T} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{I_0 \omega_0}{\hbar(\gamma^2 + \Omega^2)}} \tag{4.27}$$

ce qui est simplement le coefficient de h dans (4.25). Le rapport bruit/signal est alors donné par la densité spectrale

$$S^h(\Omega) = \frac{1}{|\mathcal{T}|^2} S_{bg} = \frac{\hbar(\gamma^2 + \Omega^2)}{2I_0 \omega_0}. \tag{4.28}$$

On peut ensuite définir quantitativement la sensibilité de l'interféromètre liée au bruit quantique. Celle-ci est donnée par $h_{bq}(\Omega) = \sqrt{S^h(\Omega)}$ et permet de déterminer l'amplitude minimale qu'une onde gravitationnelle doit avoir pour être détectée. Il vaut donc mieux minimiser $h_{bq}(\Omega)$ afin de pouvoir détecter plus d'ondes à une certaine fréquence Ω

Nous avons déjà dit que l'interféromètre est un filtre passe-bas, ce qui se confirme bien dans l'expression (4.28) de S^h . Le bruit de grenaille a beau ne pas dépendre de la fréquence, le rapport bruit/signal sera tout de même plus élevé à haute fréquence à cause de cet effet. De plus, nous voyons que S^h sera moindre si l'intensité du laser est augmentée. Remarquons que sans bruit de pression de radiation, on pourrait ainsi augmenter l'intensité du laser à une valeur arbitrairement haute pour obtenir une meilleur sensibilité de l'interféromètre³. La limite quantique standard n'apparaît donc pas si on considère uniquement le bruit de grenaille.

3. Dans les limites techniques de l'interféromètre et si le bruit thermique n'est pas trop augmenté à cause de cette hausse de l'intensité laser.

Pour des raisons qui deviendront évidentes un peu plus loin, on introduit deux grandeurs : le couplage optomécanique

$$K = \frac{8I_0\omega_0}{mL^2\Omega^2(\gamma^2 + \Omega^2)} \quad (4.29)$$

ainsi que la limite quantique standard (*Standard Quantum Limit* en anglais, abrégé en SQL)

$$h_{SQL} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2L^2}}. \quad (4.30)$$

Les noms donnés à ces quantités sont plutôt explicites. Nous verrons exactement leurs significations physiques lorsque nous aurons introduit le bruit de pression de radiation. Remarquons déjà que

$$\sqrt{\frac{I_0\omega_0}{\hbar(\gamma^2 + \Omega^2)}} = \frac{\sqrt{K}}{h_{SQL}} = \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{2}} \quad (4.31)$$

et que l'on peut donc écrire l'opérateur \hat{b}_s comme

$$\hat{b}_s = \hat{a}_s e^{2i\beta} + \sqrt{2K} e^{i\beta} \frac{h(\Omega)}{h_{SQL}}. \quad (4.32)$$

A présent, voyons quelle forme prend le bruit de pression de radiation dans un interféromètre. Pour cela, il faut revenir dans les cavités Fabry-Perot.

4.1.2 Pression de radiation sur les miroirs

Introduisons $x_{pr}(t)$, le changement de longueur d'une cavité Fabry-Perot dû à la pression de radiation du champ électromagnétique s'exerçant sur les miroirs⁴. Le déplacement que les miroirs subissent à cause de cette pression est très faible et il est donc légitime de se demander si $x_{pr}(t)$ ne doit pas être quantifié aussi. Il a été démontré dans [62] que les effets de cette quantification sont négligeables pour les fréquences Ω assez éloignées de la fréquence propre d'oscillations des miroirs suspendus. Cette fréquence se situant autour de 1 Hz, l'effet d'une telle quantification est totalement masqué par les bruits sismique et newtonien. Nous continuerons ainsi de noter la longueur $x_{pr}(t)$ comme une simple fonction et non comme un opérateur, et ceci même lorsque cette longueur apparaîtra dans les opérateurs de quadrature.

Comme nous allons le voir, c'est la superposition du champ porteur et des fluctuations quantiques qui induisent le bruit de pression de radiation. On ne peut donc pas traiter les champs classique et quantique séparément comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Nous allons donc les réunir dans un même opérateur. Le champ porteur présent dans la cavité est donné par

$$\langle \hat{E}_{\text{laser}}^{n,e} \rangle = C_0 \frac{2D}{\sqrt{T}} \cos(\omega_0 t) \quad (4.33)$$

tandis que le champ quantique qui va impacter le miroir extérieur est donné par les opérateurs \hat{j}_j , sa forme complète étant donnée par

$$\hat{E}_j(t) = C_0 \int_0^\infty \left[\cos(\omega_0 t) \left(\hat{j}_c e^{-i\Omega t} + \hat{j}_c^\dagger e^{i\Omega t} \right) + \sin(\omega_0 t) \left(\hat{j}_s e^{-i\Omega t} + \hat{j}_s^\dagger e^{i\Omega t} \right) \right] \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (4.34)$$

4. Les bruits sismique, newtonien et thermique peuvent évidemment aussi induire des mouvements du miroir. Toutefois, nous ne nous intéressons qu'au bruit quantique et nous ne les incluons pas dans le développement présent.

La superposition des deux champs nous donne ainsi le champ responsable du bruit de pression de radiation

$$\hat{E}_{pr}(t) = C_0 \int_0^\infty \left[\cos(\omega_0 t) \left(\frac{2D}{\sqrt{T}} + \hat{j}_c e^{-i\Omega t} + \hat{j}_c^\dagger e^{i\Omega t} \right) + \sin(\omega_0 t) \left(\hat{j}_s e^{-i\Omega t} + \hat{j}_s^\dagger e^{i\Omega t} \right) \right] \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (4.35)$$

Au passage, il nous faut déterminer l'expression des \hat{j}_j en fonction des \hat{f}_j afin de relier le bruit de pression de radiation aux champs entrant dans l'interféromètre. Pour cela on utilise l'expression des \hat{j}_j (4.9) et des \hat{k}_j (4.17). En isolant \hat{j}_j , on obtient alors

$$\hat{j}_j = \frac{\sqrt{T}\hat{f}_j + \sqrt{R}e^{i\Omega L/c} \delta k_j}{1 - \sqrt{R}e^{2i\Omega L/c}}. \quad (4.36)$$

En réutilisant les approximations (4.21), on peut simplifier cette expression pour avoir

$$\hat{j}_j \simeq \frac{\sqrt{T}\hat{f}_j + \delta k_j}{\frac{2L}{c}(\gamma - i\Omega)}. \quad (4.37)$$

Voyons à présent comment calculer le bruit de pression de radiation. Comme nous l'avons déjà vu, la puissance d'un champ électrique est donnée par $\hat{W} = \frac{Ac}{4\pi} \overline{\hat{E}^2}$, où l'on moyenne sur plusieurs périodes du champ de fréquence ω_0 . En effectuant le carré de \hat{E}_{pr} , des termes croisés proportionnels à $\cos^2(\omega_0 t)$, $\sin^2(\omega_0 t)$ et $\cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$ vont apparaître. Cependant, comme seul $\cos^2(\omega_0 t)$ a une moyenne non nulle, les seuls termes restant sont donc ceux proportionnels à ce facteur. De plus, les termes comprenant un produit entre deux opérateurs \hat{j}_j donnent des fluctuations d'ordre deux que l'on peut négliger. Ainsi, la puissance s'exerçant sur les miroirs prend la forme

$$\begin{aligned} \hat{W}_{pr} = C_0^2 \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{2\pi} \frac{1}{\cos^2(\omega_0 t)} \\ \times \left(\frac{4D^2}{T} + \frac{2D}{\sqrt{T}} \left(\hat{j}_c e^{-i\Omega t} + \hat{j}_c^\dagger e^{i\Omega t} + \hat{j}_c' e^{-i\Omega' t} + \hat{j}_c'^\dagger e^{i\Omega' t} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Le premier terme $4D^2/T$ est l'effet du seul champ porteur sur les miroirs. Celui-ci va induire les mêmes mouvements dans chacun des bras et ceux-ci n'apparaîtront donc pas au niveau du port antisymétrique. Remarquons ensuite que les deux intégrales sont en fait les mêmes, on peut donc n'en garder qu'une seule que l'on multiplie d'un facteur 2. L'opérateur donnant la puissance du bruit de pression de radiation est donc donné par

$$\delta \hat{W}_{pr} = C_0^2 \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \left(\frac{2D}{\sqrt{T}} \left(\hat{j}_c e^{-i\Omega t} + \hat{j}_c^\dagger e^{i\Omega t} \right) \right). \quad (4.39)$$

Nous remarquons que les termes restant dans (4.39) sont les termes croisés entre le champ porteur et le champ quantique. Physiquement, c'est donc bien la superposition de ces deux champs qui induit le bruit de pression de radiation comme nous l'avons annoncé. La conséquence est que l'augmentation de l'intensité du laser est suivie d'une augmentation du bruit de pression de radiation dans les cavités Fabry-Perot. Vu notre discussion sur le bruit de grenaille, on sent déjà poindre la limite quantique standard. Finalement, en utilisant l'expression des \hat{j}_j que l'on a déterminée juste avant, on obtient

$$\delta \hat{W}_{pr} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{I_0 \hbar \omega_0}}{(L/c)(\gamma - i\Omega)} \hat{f}_c e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} + \text{h.c.} \quad (4.40)$$

où h.c. signifie l'hermitien conjugué du terme précédent.

Pour voir l'effet que cette fluctuation de puissance peut avoir sur les miroirs, exprimons déjà la force qui s'exerce sur ceux-ci. Pour la lumière, l'énergie E est reliée à l'impulsion p par $E = pc$. La puissance et la force étant les dérivées temporelles de respectivement l'énergie et l'impulsion, on a ainsi comme force de pression de radiation

$$\hat{F}_{pr} = \frac{2\delta\hat{W}_{pr}}{c}. \quad (4.41)$$

Le facteur 2 provenant du fait que le champ est réfléchi et non pas simplement absorbé. L'équation de Newton nous permet alors d'obtenir l'évolution de la longueur de la cavité Fabry-Perot dû au bruit de pression de radiation. On a

$$\frac{d^2x_{pr}(t)}{dt^2} = \frac{4\delta\hat{W}_{pr}(t)}{mc} \quad (4.42)$$

où un facteur 2 a encore été ajouté car la force s'applique sur les deux miroirs de la cavité. Pour résoudre cette équation différentielle, on peut simplifier en prenant la transformée de Fourier de $x_{pr}(t)$ pour les seules fréquences positives. L'hermitien conjugué de cette solution permet ensuite de directement trouver celle pour les fréquences négatives. On a donc pour les fréquences positives

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \int_0^\infty x_{pr}(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} &= \frac{4}{mc} \int_0^\infty \frac{\sqrt{I_0\hbar\omega_0}}{(L/c)(\gamma - i\Omega)} \hat{f}_c e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \\ \Leftrightarrow x_{pr}(\Omega) &= -\frac{4\sqrt{I_0\hbar\omega_0}}{m\Omega^2 L(\gamma - i\Omega)} \hat{f}_c. \end{aligned} \quad (4.43)$$

On trouve alors la différence de longueur dans les bras $X_{pr} = x_{pr}^n - x_{pr}^e$, soit

$$X_{pr}(\Omega) = -\sqrt{\frac{32I_0\hbar\omega_0}{m^2 L^2 \Omega^2 (\gamma^2 + \Omega^2)}} \hat{a}_c e^{i\beta}. \quad (4.44)$$

Avec les quantités K et h_{SQL} que l'on avait définies plus haut, on obtient finalement

$$X_{pr}(\Omega) = -\sqrt{\frac{K}{2}} L h_{SQL} \hat{a}_c e^{i\beta}. \quad (4.45)$$

Remarquons que le couplage optomécanique apparaît à la fois dans X_{pr} et dans le terme de \hat{b}_s donnant le signal de l'onde gravitationnelle. Celui-ci permet donc de quantifier l'amplitude du mouvement que le miroir va effectuer sous la pression d'une onde électromagnétique d'une certaine fréquence et intensité. Et inversement, il permet aussi de quantifier la réaction de l'onde par rapport au mouvement du miroir. Le bruit de pression de radiation est donc intrinsèque à la mesure du changement de longueur d'une cavité puisque tout deux résultent du même phénomène, le couplage entre miroir et onde électromagnétique.

4.1.3 La limite quantique standard

Nous l'avons vu, une variation dans la longueur des bras de la cavité Fabry-Perot induit un transfert de puissance du champ classique vers le champ quantique décrit par les opérateurs \hat{k}_j . Pour prendre en compte X_{pr} dans le calcul de la densité spectrale de bruit, il suffit de rajouter celui-ci à X dans l'expression des δk_j (4.16). On peut alors obtenir l'expression définitive des quadratures du champ électromagnétique sortant de l'interféromètre en reprenant l'équation (4.25). On obtient

$$\boxed{\hat{b}_c = \hat{a}_c e^{2i\beta}} \quad (4.46)$$

Caractéristiques	aLIGO	aLIGO+	Voyager	CE	ET BF	ET HF
Longueur bras [km]	4	4	4	40	10	10
Masse miroirs [kg]	40	40	200	320	211	200
Puissance I_0 [kW]	5,2	5,35	3	?	1,5	10,8
Puissance F-P [kW]	710	750	3000	2000	18	3000
Longueur d'onde λ_0 [nm]	1064	1064	2000	1550	1550	1064
Facteur compression [dB]	0	6	8	10	10	10

TABLE 4.1 – Caractéristiques des interféromètres aLIGO, aLIGO+, Voyager, Cosmic Explorer (CE) et du télescope Einstein (ET) pour la détection des ondes gravitationnelles à basses fréquences (BF) et à hautes fréquences (HF). Seul aLigo est actuellement opérationnel, les valeurs reprises dans le tableau étant celles correspondant à avant le 1er avril. On a dans l'ordre : la longueur des bras, la masse des miroirs, la puissance du laser à la lame séparatrice et dans les cavités Fabry-Perot et la longueur d'onde du laser. Le dernier paramètre est le facteur de compression qui nous servira dans le prochain chapitre [16, 63, 17].

$$\begin{aligned}
\hat{b}_s &= \hat{a}_s e^{2i\beta} + \frac{\sqrt{2}}{L} e^{i\beta} \sqrt{\frac{I_0 \omega_0}{\hbar(\gamma^2 + \Omega^2)}} ([X^n(\Omega) - X^e(\Omega)] + X_{pr}) \\
&= \hat{a}_s e^{2i\beta} + \frac{8I_0 \omega_0}{mL\Omega(\gamma^2 + \Omega^2)} e^{2i\beta} \hat{a}_c + \sqrt{2K} e^{i\beta} \frac{h(\Omega)}{h_{SQL}}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Le coefficient devant \hat{a}_c dans la dernière équation est très exactement K et on a donc

$$\boxed{\hat{b}_s = (\hat{a}_s - K\hat{a}_c) e^{2i\beta} + \sqrt{2K} \frac{h}{h_{SQL}} e^{i\beta}}. \tag{4.48}$$

A l'aide de cette expression, on peut discuter de manière plus approfondie du bruit quantique. Pour avoir une idée des différentes valeurs des paramètres I_0, m, \dots , la Table 4.1 reprend quelques caractéristiques de différents interféromètres.

Remarquons déjà que tant le bruit de grenaille que le bruit de pression de radiation sont donnés par les opérateurs \hat{a}_j . Ceux-ci étant liés à l'état du vide entrant par le port antisymétrique, ce sont donc bien les fluctuations du vide qui induisent le bruit quantique limitant la précision des interféromètres à ondes gravitationnelles !

Ensuite, considérons que nous mesurons toujours la quadrature \hat{b}_s à l'aide d'une détection homodyne. Pour déterminer les densités spectrales de bruit, définissons $\hat{n}_{bg} = e^{2i\beta} \hat{a}_s$ et $\hat{n}_{pr} = e^{2i\beta} K\hat{a}_c$, les opérateurs donnant respectivement le bruit de grenaille et le bruit de pression de radiation. Vu les densités spectrales pour l'état cohérent du vide $S_{cc} = S_{ss} = 1$ calculées au chapitre précédent, on a

$$S_{bg} = 1 \quad S_{pr} = K^2. \tag{4.49}$$

La sensibilité de l'interféromètre liée à chaque bruit est donc

$$h_{bg} = \sqrt{S_{bg}} = 1 \quad h_{pr} = \sqrt{S_{pr}} = K = \frac{8I_0 \omega_0}{mL^2 \Omega^2 (\gamma^2 + \Omega^2)}. \tag{4.50}$$

Contrairement au bruit de grenaille qui ne dépendait ni de Ω ni de I_0 , le bruit de pression de radiation est proportionnel à l'intensité I_0 du laser et inversement proportionnel à la fréquence Ω . La Figure 4.3 montre le comportement des deux bruits selon Ω et I_0 . Le bruit de pression de radiation domine à basse fréquence et à haute intensité tandis que le bruit de grenaille reprend le dessus à haute fréquence et à basse intensité. Ceci a de fortes répercussions au niveau

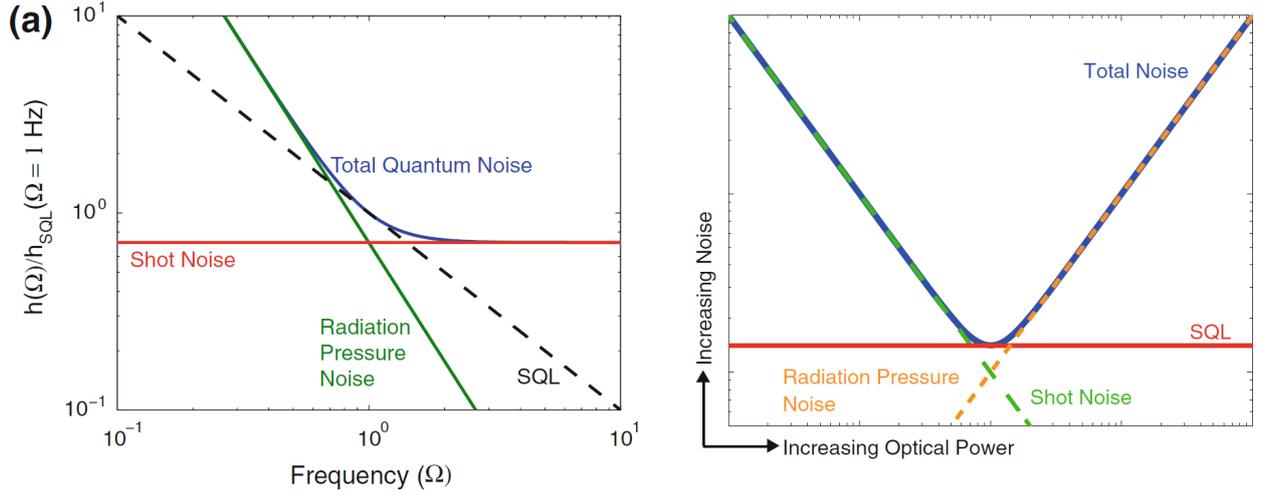


FIGURE 4.3 – À gauche, graphe du comportement du bruit de grenaille $\sqrt{S_{bg}}$ (*shot noise* en anglais) et du bruit de pression de radiation $\sqrt{S_{pr}}$ (*radiation pressure noise* en anglais) en fonction de la fréquence Ω . La courbe noire en tiret est la limite quantique standard pour chaque fréquence. À droite, graphe du bruit de pression de radiation et du bruit de grenaille selon l'intensité lumineuse I_0 [64].

expérimental. En effet, jusqu'à présent, le bruit de pression de radiation étant principalement présent à basse fréquence, celui-ci est complètement insignifiant à côté des bruits sismique et newtonien. Augmenter l'intensité du laser n'a donc aucune conséquences sur le bruit quantique (le bruit de grenaille ne dépendant pas de I_0) alors que, au travers de la fonction de transfert \mathcal{T} , le signal était amplifié. Toutefois, les prochaines générations d'interféromètres comme le télescope Einstein auront des bruits sismique et newtonien fortement diminués. Le bruit de pression de radiation va donc très certainement être limitant aux alentours de quelques hertz et augmenter l'intensité lumineuse induira donc une baisse de sensibilité à ces fréquences. Pour cette raison, le télescope Einstein comprendra en fait deux interféromètres, l'un pour les basses fréquences et l'autre pour les hautes fréquences. Le premier aura donc une intensité plus basse tandis qu'elle sera plus élevée pour le second ; comme on peut le voir sur la Table 4.1.

Augmenter la sensibilité à haute fréquence au détriment de celle à basse fréquence est la signature caractéristique de la limite quantique standard. Voyons comment celle-ci apparaît à partir des densités spectrales. On définit l'opérateur

$$\hat{h}_b = \frac{1}{\mathcal{T}}(\hat{a}_s - K\hat{a}_c) = \frac{h_{SQL}}{\sqrt{2K}}(\hat{a}_s - K\hat{a}_c) \quad (4.51)$$

qui représente le rapport bruit/signal. La densité spectrale S^h quantifiant ce rapport est alors donnée par

$$2\pi S^h \delta(\Omega - \Omega') = \langle 0 | \hat{h}_b(\Omega) \hat{h}_b^\dagger(\Omega') + \hat{h}_b^\dagger(\Omega') \hat{h}_b(\Omega) | 0 \rangle. \quad (4.52)$$

et on a

$$S^h = \left(K S_{cc} + \frac{S_{ss}}{K} - S_{cs} - S_{sc} \right) \frac{h_{SQL}^2}{2}. \quad (4.53)$$

Sachant que dans l'état du vide cohérent, les densités spectrales croisées S_{cs} et S_{sc} sont nulles, on obtient le rapport bruit/signal

$$S^h(\Omega) = \left(\frac{1}{K} + K \right) \frac{h_{SQL}^2}{2}. \quad (4.54)$$

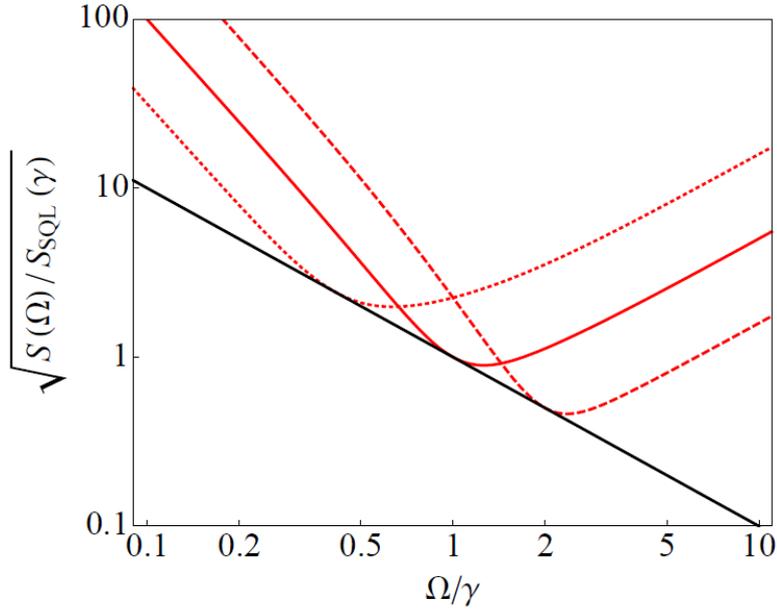


FIGURE 4.4 – Graphe de la sensibilité d’un interféromètre dû au bruit quantique en fonction de la fréquence Ω . Les différentes courbes correspondent à différentes intensités I_0 du laser. La courbe pointillée correspond à une puissance 10 fois plus faible que celle pour la courbe pleine qui correspond elle-même à une puissance 10 fois plus faible que celle pour la courbe en tirets. La ligne noire représente la limite quantique standard à chaque fréquence [65].

Cette densité spectrale est minimisée lorsque $K = 1$ et on a dans ce cas

$$S^h = h_{SQL}^2 = \frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2} \quad (4.55)$$

La sensibilité de l’interféromètre est alors h_{SQL} , la précision est donc limitée à cette valeur d’où son nom de limite quantique standard. Remarquons la présence de \hbar au numérateur qui prouve bien que nous avons affaire à un effet quantique. Sur la Figure 4.4, on peut voir l’évolution de la sensibilité de l’interféromètre selon la fréquence Ω . Si on augmente l’intensité I_0 , S^h diminuera à haute fréquence mais augmentera à basse fréquence. On peut voir sur la Figure 4.4 que modifier l’intensité du laser fait glisser la courbe de sensibilité sur la limite quantique standard mais sans jamais que cette dernière ne soit dépassée. Précisons que la limite quantique standard n’est pas un concept propre à l’interféromètre Michelson. Elle apparaît de manière générale lorsque l’on veut mesurer continûment certaines observables et est à la base de l’expérience de pensée du microscope d’Heisenberg [66].

Mais alors, est-ce à dire que nous sommes condamnés à ne pas pouvoir détecter d’ondes gravitationnelles si celles-ci n’ont pas l’amplitude requise ? Heureusement non ! En regardant l’expression de h_{SQL} , deux méthodes apparaissent déjà pour améliorer la sensibilité d’un interféromètre. Tout d’abord, réhausser la masse des miroirs. Ces derniers réagissent alors moins à la pression de radiation du champ électromagnétique. Le bruit est réduit à basse fréquence et il est donc possible d’augmenter l’intensité du laser jusqu’à atteindre la limite quantique standard définie par la nouvelle masse. Le problème d’une telle modification est qu’il faut alors des fils plus épais afin de soutenir le poids des miroirs, ce qui entraîne des bruits sismiques plus importants. Ensuite, on en avait déjà parlé, on peut augmenter la longueur des bras de l’interféromètre afin que la différence de longueur induite par l’onde gravitationnelle soit plus importante. Cependant, cela a un coût certain et, de plus, il y a une limite à cette augmentation. En effet, il ne faudrait pas que le temps de stockage de la lumière dans les cavités Fabry-Perot soit plus long que la demi-période de l’onde gravitationnelle. Le bras qui était allongé, dans

un premier temps, se rétracterait alors que la lumière est toujours dans la cavité Fabry-Perot. L'effet accumulé pendant la première demi-période serait ainsi supprimé lors de la seconde.

Nous le voyons, ces deux méthodes jouent toutes les deux sur une réévaluation de la limite quantique standard. Toutefois, elles ne permettent pas de réellement dépasser celle-ci. On a d'ailleurs longtemps pensé que cela était impossible. Cependant, de nouvelles méthodes développées récemment ont montré qu'outrepasser la limite quantique standard ne tenait pas de l'utopie. L'ensemble de ces méthodes portent le nom de mesures quantiques non destructives et sont l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 5

Mesures quantiques non destructives

Examinons à présent les principales techniques qui ont été ou vont être appliquées dans les interféromètres dédiés à la détection d'ondes gravitationnelles afin de dépasser la limite quantique standard. Ces techniques font partie de l'ensemble des mesures quantiques non destructives. Le qualificatif de *non destructives* s'explique du fait que l'on mesure de manière continue une observable (la position d'un miroir dans ce cas ci). L'état quantique du système ne doit donc pas être détruit par une mesure qui induirait une réaction (le bruit de pression de radiation) compromettant la mesure suivante. L'étude du bruit quantique et des mesures quantiques non destructives fait partie de la discipline plus générale qu'est la métrologie quantique. Trois techniques de mesures quantiques non destructives peuvent directement être installées dans les interféromètres standards avec cavités Fabry-Perot : l'injection d'états comprimés de la lumière, la détection homodyne ainsi que le recyclage de signal. Les trois prochaines sections sont consacrées à leur présentation.

5.1 L'injection d'états comprimés de la lumière

L'injection d'états comprimés consiste à remplacer l'état du vide qui entre par le port antisymétrique dans l'interféromètre par un état comprimé de la lumière ; la quadrature mesurée étant toujours \hat{b}_s . Dans le point de vue de Schrödinger, on injecte l'état du vide comprimé suivant

$$|0, (R, \theta)\rangle = \hat{S}(R, \theta) |0\rangle \quad (5.1)$$

où R et θ sont respectivement le facteur et l'angle de compression. Carlton Caves fut le premier à avoir proposé l'injection d'états comprimés dans un interféromètre [59]. Il avait alors choisi $\theta = 0$ afin de comprimer la quadrature \hat{a}_s et de réduire le bruit de grenaille. Pour un tel angle de compression, on a la matrice des densités spectrales (3.80)

$$\begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cs} \\ S_{sc} & S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2R} & 0 \\ 0 & e^{-2R} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

En reprenant (4.53), le rapport bruit/signal est donc

$$S^h = \left(\frac{e^{-2R}}{K} + K e^{2R} \right). \quad (5.3)$$

On voit que le bruit de grenaille est réduit d'un facteur e^{-2R} tandis que le bruit de pression de radiation est augmenté d'un facteur e^{2R} . Ce cas est donc similaire à une augmentation de l'intensité lumineuse. Injecter des états comprimés d'angle $\theta = 0$ peut donc servir si l'on atteint un bruit thermique dû à l'intensité I_0 qui devient trop important. Le bruit de grenaille est

alors atténué alors que le bruit de pression de radiation est dominé par les bruits sismique et newtonien. Remarquons que pour $\theta = \pi/2$, à partir de (3.81)

$$S^h = \left(\frac{e^{2R}}{K} + K e^{-2R} \right). \quad (5.4)$$

On obtient donc l'effet inverse, le bruit de grenaille est augmenté alors que le bruit de pression de radiation est diminué. Jusqu'à présent, effectuer une compression d'angle $\theta = 0$ permet d'améliorer la sensibilité à hautes fréquences sans avoir d'impact sur les basses fréquences. On a donc injecté des états comprimés pour la première fois dans l'interféromètre GEO600 en 2010 et LIGO en 2011 [69, 70]. Les états comprimés sont d'ailleurs utilisés en permanence dans GEO600 depuis 2011 [67, 68] et les instruments LIGO et Virgo les utilisent depuis avril dernier. La réduction du bruit à hautes fréquences est clairement visible sur la Figure 5.1.

Voyons un cas plus intéressant, lorsque $\theta = \pi/4$. On a alors la matrice

$$\begin{bmatrix} S_{cc} & S_{cs} \\ S_{sc} & S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh^2 R + \sinh^2 R & 2 \cosh R \sinh R \\ 2 \cosh R \sinh R & \cosh^2 R + \sinh^2 R \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ce qui donne comme rapport bruit/signal

$$S^h = \frac{h_{SQL}^2}{2} \left[(\cosh^2 R + \sinh^2 R) \left(\frac{1}{K} + K \right) - 4 \cosh R \sinh R \right]. \quad (5.6)$$

Le résultat est visible sur la Figure 5.2 ainsi que pour les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. On voit un pic qui dépasse largement la limite quantique standard à 10 Hz. Remarquons qu'encore une fois, la limite quantique standard est surpassée lorsqu'il existe des corrélations entre opérateurs de quadrature. Pour voir comment obtenir une réduction du bruit quantique à toutes les fréquences, résumons quelque peu nos résultats. A basse fréquence, le bruit de pression de radiation domine et on peut le réduire à l'aide d'états comprimés avec $\theta = \pi/2$. A haute fréquence, le bruit de grenaille domine et on peut le réduire à l'aide d'états comprimés avec $\theta = 0$. Enfin, on vient de le voir dans un exemple, pour un angle compris dans $0 < \theta < \pi/2$, la limite quantique standard est dépassée à une certaine fréquence Ω d'ondes gravitationnelles [60]. Il faudrait donc contrôler l'angle de compression afin qu'il démarre à $\theta = \pi/2$ à basse fréquence et qu'il évolue peu à peu avec la fréquence Ω jusqu'à atteindre $\theta = 0$ à haute fréquence.

Pour quantifier cela, il faut calculer la densité spectrale du rapport bruit/signal pour une compression quelconque. On a [60]

$$S^h = \frac{h_{SQL}^2}{2} \left(\frac{1}{K} + K \right) (\cosh 2R - \cos[2(\theta + \Phi)] \sinh 2R) \quad (5.7)$$

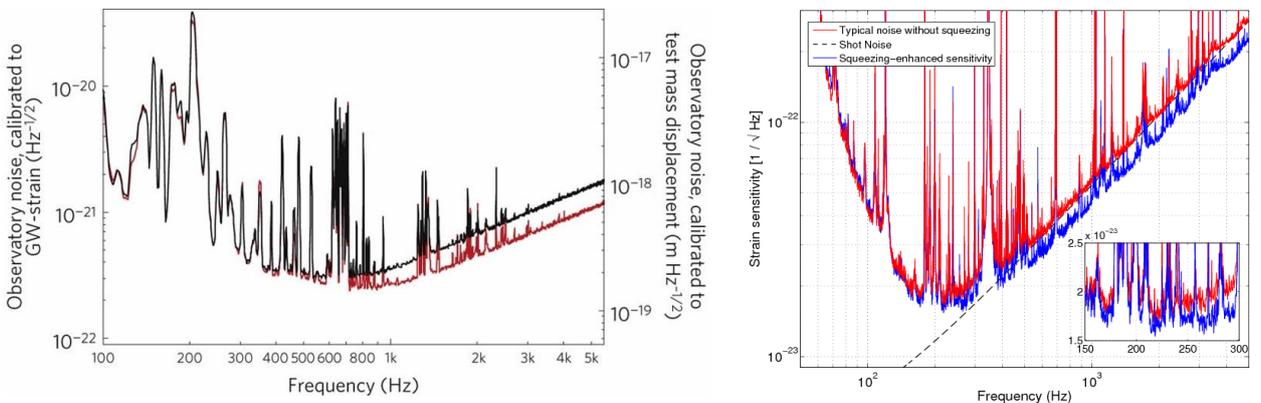


FIGURE 5.1 – Diminution du bruit total dans les interféromètres GEO 600 (à gauche) et LIGO (à droite) par injection d'états comprimés avec un angle de compression $\theta = 0^\circ$ [69,70].

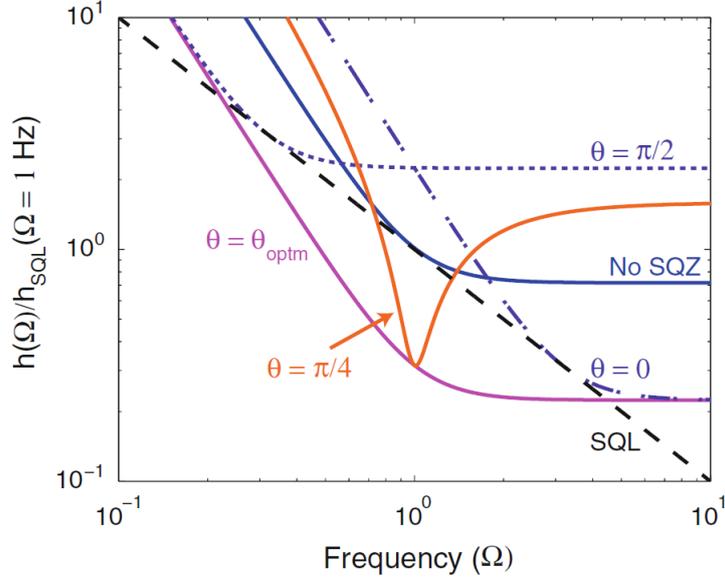


FIGURE 5.2 – Comportement du bruit quantique sous différents angles de compression [64].

où $\Phi = \text{arctg}K$. Cette expression est minimisée à toutes les fréquences si l'on prend

$$\theta(\Omega) = \theta_{optm}(\Omega) = -\Phi(\Omega) = -\text{arctg}(K) \quad (5.8)$$

et on a alors

$$S^h = \frac{h_{SQL}^2}{2} \left(\frac{1}{K} + K \right) e^{-2R}. \quad (5.9)$$

On voit que le bruit quantique est réduit d'un facteur e^{-2R} par rapport au cas non comprimé à toutes les fréquences Ω . Le résultat est visible sur la Figure 5.2, la limite quantique standard est dépassée sur une très large gamme de fréquences ! Comme dans ce cas ci, l'angle de compression est lié à Ω , on parle souvent de compression dépendante de la fréquence. William Unruh fut le premier à proposer cette technique de réduction du bruit quantique [71], ses idées ayant été plus amplement développées par Reynaud et Jaekel [72].

Expérimentalement, trois difficultés majeures apparaissent dans la réalisation des états comprimés dépendants de la fréquence. Tout d'abord, la lumière lors de son trajet dans l'interféromètre subit des pertes optiques. Dans le cas des états comprimés, ces pertes peuvent s'expliquer par l'état du vide du champ électromagnétique qui peut entrer dans l'interféromètre en divers endroits (au niveau du miroir extérieur de la cavité Fabry-Perot par exemple). Celui-ci se superpose alors à l'état du vide comprimé réduisant ainsi le facteur de compression R . Il peut aussi arriver qu'un photon de l'état comprimé soit diffusé sur une particule présente dans l'interféromètre ou par l'un des composants optiques. Or, la compression dépend de l'intrication entre photons créée lors du processus à deux photons. Si un de ces photons est diffusé, le second qui lui était lié perd son caractère comprimé. Notons que ces pertes optiques ne sont pas à prendre à la légère et qu'elles pourraient bien être la future limite des interféromètres à ondes gravitationnelles [73]. Ensuite, il faut pouvoir effectivement réaliser la dépendance en fréquence de l'angle θ . Et enfin, les états comprimés doivent être générés avec un facteur de compression R suffisamment élevé.

5.2 La lecture variationnelle

Nous l'avons vu lors de la discussion sur le bruit quantique, le signal d'une onde gravitationnelle s'imprime sur la seconde quadrature \hat{b}_s . Nous avons alors naïvement décidé de nous

concentrer uniquement sur cette quadrature lors de la mesure. A l'inverse, la lecture variationnelle consiste à ne pas mesurer uniquement la quadrature \hat{b}_s mais une combinaison des quadratures \hat{b}_c et \hat{b}_s . Nous avons vu comment cela était possible lors de notre discussion sur la détection homodyne à la section 3.3. Pour un angle de détection homodyne ϕ , il est ainsi possible de mesurer l'opérateur

$$\hat{b}_\phi = \hat{b}_c \cos \phi + \hat{b}_s \sin \phi. \quad (5.10)$$

En termes des opérateurs \hat{a}_c et \hat{a}_s , les équations (4.46) et (4.48) permettent d'écrire

$$\hat{b}_\phi = [\hat{a}_s + (\cot \phi - K)\hat{a}_c] \sin \phi e^{2i\beta} + \sqrt{2K} \frac{h}{h_{SQL}} \sin \phi e^{i\beta}. \quad (5.11)$$

Remarquons que la fonction de transfert permettant de quantifier la réponse de l'interféromètre à une onde gravitationnelle est alors

$$\mathcal{T}_\phi = \frac{\sqrt{2K}}{h_{SQL}} \sin \phi. \quad (5.12)$$

L'opérateur permettant de quantifier le rapport bruit/signal est donc

$$\hat{h}_b = \frac{1}{\mathcal{T}_\phi} [\hat{a}_s + (\cot \phi - K)\hat{a}_c] \sin \phi = \frac{h_{SQL}}{\sqrt{2K}} [\hat{a}_s + (\cot \phi - K)\hat{a}_c]. \quad (5.13)$$

La manière de dépasser h_{SQL} apparaît clairement dans cette dernière expression. En effet, en choisissant un angle ϕ dépendant de la fréquence comme

$$\phi(\Omega) = \text{arccot} K \quad (5.14)$$

on peut totalement annuler le bruit de pression de radiation, donné par \hat{a}_c , et son impact sur la mesure [60]. Cette variation en fréquence de l'angle de détection justifie le nom de lecture variationnelle. La densité spectrale du bruit quantique est alors donnée par

$$S^h = \frac{1}{K} \frac{h_{SQL}^2}{2}, \quad (5.15)$$

ce qui est bien similaire à (4.54) dont on aurait retiré la densité spectrale liée à la pression de radiation. Le bruit quantique à basse fréquence est ainsi fortement diminué (voir Fig. 5.3 à gauche) puisqu'il ne reste que le bruit de grenaille. Ce dernier bruit peut ensuite être diminué en augmentant l'intensité I_0 ou en appliquant des états comprimés avec un angle de compression $\theta = 0$. En effet, les différentes techniques de mesure quantique non destructive peuvent être combinées entre elles afin d'atteindre un bruit quantique encore plus minimisé. Dans le cas d'une lecture variationnelle avec injection d'états comprimés d'angle $\theta = 0$, on obtient comme densité spectrale de bruit

$$S^h = \frac{1}{K} \frac{h_{SQL}^2 e^{-2R}}{2}. \quad (5.16)$$

C'est précisément la densité spectrale précédente mais à laquelle on ajoute un facteur de compression e^{-2R} .

Un problème majeur apparaît cependant quant à l'utilisation de la lecture variationnelle dans un interféromètre. En effet, cette technique est beaucoup moins robuste par rapport aux pertes optiques que celle de l'injection d'états comprimés, les basses fréquences étant les plus affectées [56]. On peut le voir en comparant les deux graphes de la Figure 5.3. A gauche, les pertes optiques ne sont pas incluses. On voit clairement l'amélioration de la sensibilité à basse fréquence due à la lecture variationnelle à laquelle on ajoute des états comprimés d'angle $\theta = 0$. A droite, les pertes optiques sont incluses. On remarque que le gain est nettement plus faible et que les états comprimés dépendants de la fréquence sont beaucoup moins impactés par ces pertes optiques. Cette dernière technique de mesure quantique non destructive est donc privilégiée jusqu'à présent.

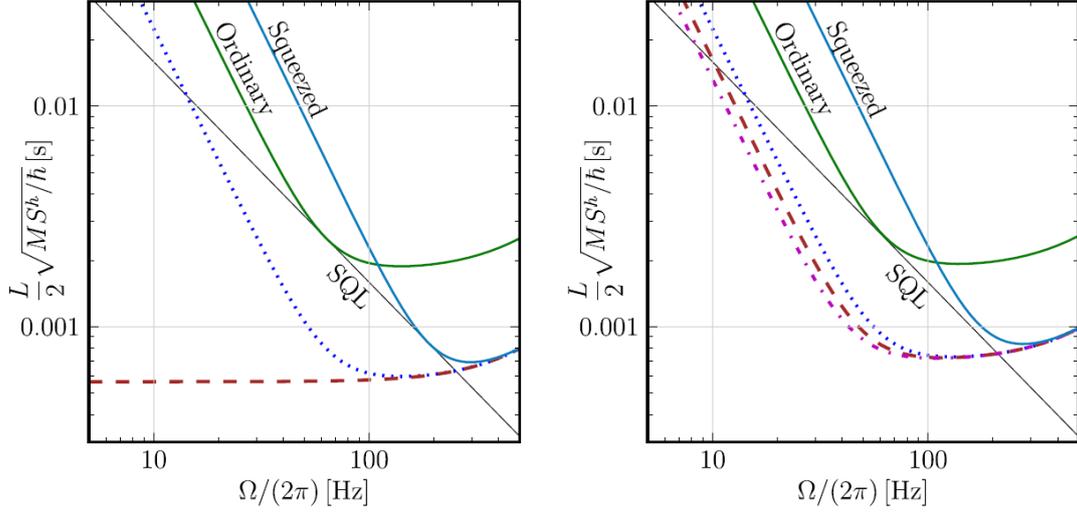


FIGURE 5.3 – Graphes de la sensibilité d’un interféromètre pour différentes configurations. A gauche, les pertes optiques ne sont pas comprises tandis qu’elles le sont à droite. En vert : interféromètre classique. En bleu continu : utilisation d’états comprimés à 10 dB d’angle $\theta = 0$. En bleu pointillé : utilisation d’états comprimés dépendants de la fréquence. En rouge : mesure par lecture variationnelle couplée à l’utilisation d’états comprimés à 10 dB d’angle $\theta = 0$. En magenta : utilisation d’états comprimés à 10 dB dépendants de la fréquence et mesure par lecture variationnelle [8].

5.3 Le recyclage de signal

Le recyclage de signal consiste à placer un miroir supplémentaire entre le port antisymétrique et la lame séparatrice. Une nouvelle cavité, qualifiée de recycleuse, est ainsi formée (voir Fig. 5.4). Nous noterons par l la longueur de cette cavité et par ρ et τ les coefficients de réflectivité et de transmissivité du nouveau miroir. Il s’ensuit que lors d’un voyage dans la cavité, le champ porteur subit un déphasage $\phi \equiv \omega_0 l/c$ tandis que les autres champs acquièrent un déphasage supplémentaire Ω/c que nous négligerons dans la suite (la cavité faisant typiquement une dizaine de mètres). Nous verrons que le déphasage ϕ , et donc la longueur de la cavité recycleuse, aura un impact important sur la sensibilité de l’interféromètre. L’effet induit par cette technique sur le bruit quantique a été amplement étudié par Buonanno et Chen dans une série d’articles [55, 74] sur lesquels nous nous basons.

Pour déterminer la nouvelle forme du bruit quantique dans le cas du recyclage de signal, il faut continuer le calcul effectué précédemment en tenant compte du champ électrique réfléchi et transmis par le miroir du port antisymétrique. Le développement est sensiblement similaire à celui effectué précédemment. Sous forme matricielle, les opérateurs de quadrature sortant de l’interféromètre par le port antisymétrique sont donnés par [55]¹

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_c \\ \hat{b}_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \left[e^{2i\beta} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_c \\ \hat{a}_s \end{pmatrix} + \sqrt{2K}\tau e^{i\beta} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \frac{h}{h_{SQL}} \right]. \quad (5.17)$$

1. Notons que ce sont ces équations (auxquelles il faut rajouter les pertes optiques) qui ont été utilisées pour déterminer le bruit quantique dans les interféromètres Advanced LIGO durant la phase ayant permis la première détection d’une onde gravitationnelle [75]. Ces formules sont importantes car elles permettent de déterminer les valeurs des différents paramètres de la cavité de recyclage qui permettent de maximiser la sensibilité d’un interféromètre aux fréquences voulues. Pour la phase actuelle qui a commencée début avril, il suffit de rajouter l’effet de l’utilisation des états comprimés d’angle $\theta = 0$ afin d’obtenir les formules de bruit quantique actuellement utilisées.

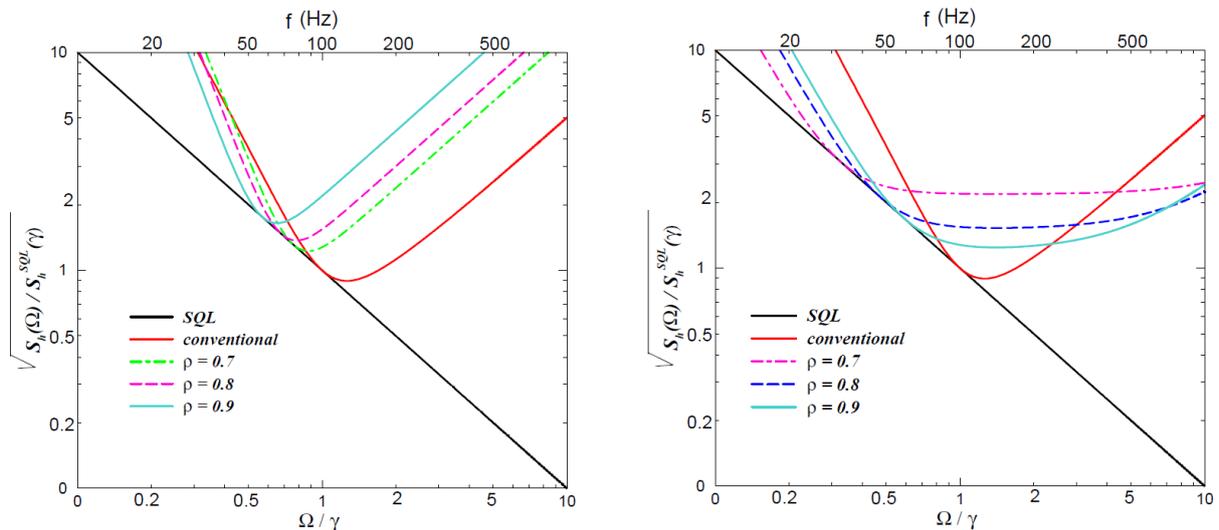


FIGURE 5.5 – Graphes de la sensibilité selon la fréquence d’un interféromètre muni d’une cavité recycleuse. A gauche, cas du recyclage maximal de signal où $\phi = 0$. A droite, cas de l’extraction maximale du signal où $\phi = \pi/2$. [76]

Le résultat peut être visualisé sur l’image de gauche de la Figure 5.5 pour différentes valeurs du coefficient de réflectivité ρ . Une première remarque est que la limite quantique standard n’est pas franchie dans ce cas-ci. Cette configuration n’est donc pas appropriée. Ensuite, on voit que le minimum de la courbe ne se trouve plus à la même fréquence que dans le cas sans recyclage de signal, ce minimum évoluant selon la valeur de ρ . Il est donc possible d’obtenir un bruit quantique réduit à une fréquence déterminée. Cependant, cela se fait au prix d’un bruit plus important sur les bandes de fréquences inférieure et supérieure. Physiquement, on peut le comprendre car lorsque $\phi = 2k\pi$, le champ électromagnétique est ajusté (*tuned* en anglais) afin d’être en résonance maximale avec la cavité de recyclage. Le signal de l’onde gravitationnelle est ainsi renvoyé dans les bras de l’interféromètre et le temps durant lequel l’onde électromagnétique est présente dans la cavité est augmenté. Le signal peut donc s’imprimer plus longtemps sur le champ électromagnétique ! Toutefois, le bruit de pression de radiation peut lui aussi s’imprimer plus longtemps ce qui explique l’augmentation du bruit à basse fréquence. De plus, l’interféromètre fonctionne comme un filtre passe-bas [77]. Les fréquences supérieures à la fréquence de résonance de l’interféromètre ont donc un signal détérioré. Cette configuration que l’on appelle recyclage maximal de signal n’est clairement pas à privilégier.

La configuration inverse est de maximiser le signal sur l’opérateur de quadrature \hat{b}_c . Pour cela, il faut choisir $\phi = \pi/2 + 2k\pi$ et le champ électrique est alors en anti-résonance avec la cavité de recyclage. La densité spectrale de bruit est alors

$$S_c^h = \frac{h_{SQL}^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{K}} + \bar{K} \right) \quad (5.24)$$

où on a défini

$$\bar{K} = \frac{K\rho^2}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\beta}. \quad (5.25)$$

Le résultat peut être visualisé sur l’image de droite de la Figure 5.5 avec à nouveau différentes valeurs de ρ . Encore une fois, la limite quantique standard n’est pas dépassée. Cependant, cette configuration peut être intéressante car on voit que, malgré une sensibilité amoindrie autour de γ , la sensibilité est améliorée sur les bandes de fréquences inférieure et supérieure. Cet effet s’améliorant avec l’augmentation de la réflectivité du miroir recycleur. Cet effet apparaît car le signal est extrait plus rapidement de la cavité que dans un interféromètre sans recyclage, cette

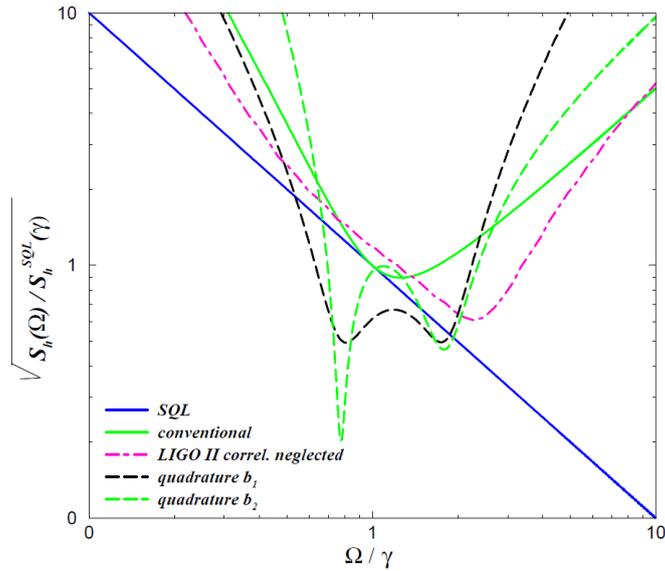


FIGURE 5.6 – Graphe de la sensibilité selon la fréquence d’un interféromètre muni d’une cavité recycleuse. La quadrature mesurée est \hat{b}_c pour la courbe pointillée noire et \hat{b}_s pour la courbe pointillée verte [76].

configuration est ainsi appelée extraction maximale du signal. Nous sommes donc dans le cas contraire au précédent, d’où le fait qu’on obtienne l’effet inverse. La sensibilité de l’interféromètre est donc améliorée sur une large gamme de fréquences, ce qui peut être utile si l’on veut détecter des sources aux profils variés. C’est le cas pour l’interféromètre Advanced LIGO. Cette configuration est donc celle qui a été utilisée pour les phases d’observations qui ont permis la détection des ondes gravitationnelles [75].

Nous voyons que les deux cas extrêmes présentés ici ne permettent pas de surpasser la limite quantique standard. Passons à présent aux cas intermédiaires où $2k\pi < \phi < \pi/2 + 2k\pi$. La cavité de recyclage est alors dite non ajustée car nous ne sommes plus dans un cas, comme précédemment, où le champ électrique est exactement en résonance ou en anti-résonance avec cette cavité. Les densités spectrales associées aux quadratures \hat{b}_c et \hat{b}_s sont données respectivement par

$$S_c^h = \frac{h_{SQL}^2}{2K} \frac{C_{11}^2 + C_{12}^2}{\tau^2 |D_1|^2} \quad S_s^h = \frac{h_{SQL}^2}{2K} \frac{C_{22}^2 + C_{21}^2}{\tau^2 |D_2|^2}. \quad (5.26)$$

Ces deux densités spectrales sont représentées sur la Figure 5.6. Celle-ci montre très explicitement deux pics pour chaque quadrature qui franchissent la limite quantique standard! Pour comprendre l’origine physique de ces pics, intéressons-nous au cas où $\rho = 1$, l’interféromètre étant alors fermé. On peut alors montrer que les fréquences de résonance Ω_{res} de l’interféromètre dans son entièreté (cavité de recyclage comprise) sont données par [55]

$$\frac{\Omega_{res}^2}{\gamma^2} = \frac{1}{2} \left(\tan^2 \phi \pm \sqrt{\tan^4 \phi - \frac{16I_0\omega_0}{mL^2\gamma^4} \tan \phi} \right). \quad (5.27)$$

Quel est alors le lien entre ces fréquences de résonance et les pics dépassant la limite quantique standard? Il se fait que ces pics se produisent très précisément à ces fréquences Ω_{res} (voir l’image de gauche de la Figure 5.7) ce qui suggère un effet d’amplification permettant une amélioration du rapport signal/bruit.

Remarquons que pour une intensité I_0 très faible, la constante de couplage optomécanique K est négligeable et donc les miroirs et le champ électrique sont découplés. Le second terme présent dans la racine de (5.27) devient alors négligeable et les fréquences de résonance sont

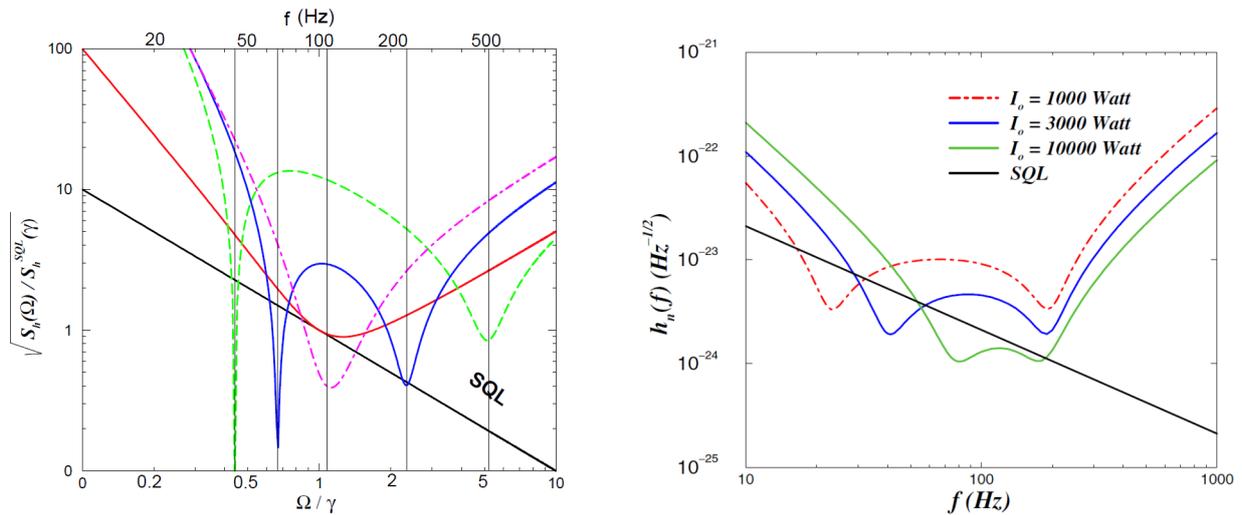


FIGURE 5.7 – A gauche, graphe de la sensibilité selon la fréquence d’un interféromètre muni d’une cavité recycleuse. La seconde quadrature \hat{b}_s est mesurée et le coefficient de réflectivité du miroir recycleur est $\rho = 0,95$. En rouge : cas d’un interféromètre classique. En vert, bleu et rose, on a respectivement $\phi = \pi/2 - 0,19$, $\phi = \pi/2 - 0,39$ et $\phi = \pi/2 - 0,59$. Les lignes verticales correspondantes aux résonances calculées à l’aide de (5.27) [76]. A droite, graphe de la sensibilité selon la fréquence d’un même interféromètre pour différentes valeurs d’intensité I_0 [78].

alors

$$\Omega_{res}^0 = 0 \quad \Omega_{res}^{1,2} = \pm \gamma \tan \phi. \quad (5.28)$$

La première fréquence peut être interprétée comme étant la fréquence propre des miroirs libres ($\Omega = 0$) alors que les deux autres sont les fréquences du champ électrique donnant un champ stationnaire dans l’interféromètre. Lorsque l’intensité lumineuse est augmentée, les miroirs et le champ électrique se couplent et les miroirs ne peuvent donc plus être considérés comme libres. La fréquence propre de ceux-ci devraient donc évoluer avec I_0 et c’est effectivement le cas comme on peut le voir sur l’image de droite de la Figure 5.7. Les fréquences $\Omega_{res}^{1,2}$ évoluent aussi avec I_0 mais de manière beaucoup plus modérée [74].

Ce couplage entre miroirs et champ électrique induit en fait l’émergence du phénomène de ressort optique entre miroirs d’une même cavité Fabry-Perot, ce phénomène n’apparaissant pas pour $\phi = 0$ ou $\phi = \pi/2$ [74]. Cet effet peut être expliqué assez simplement à l’aide de la figure 5.8. Considérons une cavité non ajustée (*detuned* en anglais) dont l’un des miroirs peut bouger d’une certaine quantité x (dans notre cas ce déplacement se ferait sous l’effet d’une

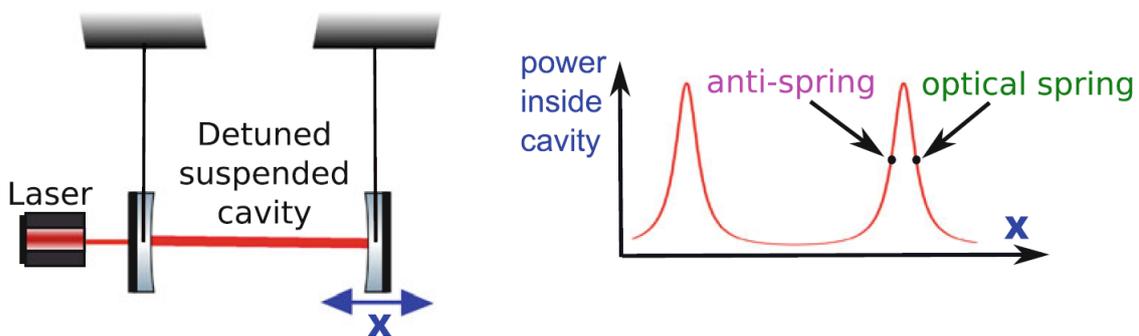


FIGURE 5.8 – Schéma explicatif de l’effet du ressort optique [5].

onde gravitationnelle ou de la pression de radiation). Si le déplacement se fait vers la droite, la puissance à l'intérieur de la cavité diminue et la pression de radiation de même. La force exercée par le laser sur le miroir dans la direction du déplacement est donc moindre et celui-ci est donc naturellement renvoyé à sa position de départ. A l'inverse, si le déplacement x se fait vers la gauche, l'intensité dans la cavité augmente, la force exercée par la pression de radiation augmente et le miroir est repoussé à sa position initiale. On a bien un effet de ressort avec une force de rappel dû au faisceau laser ramenant le miroir à sa position d'équilibre, d'où le nom de ressort optique. La dynamique des miroirs n'est donc plus celle d'une masse libre mais d'un oscillateur harmonique dont la réponse va dépendre de la fréquence Ω de la force imposée, d'où les pics de sensibilité observés dans la Figure 5.7².

En ce qui concerne le bruit quantique, le phénomène important à prendre en compte est que la pression de radiation réagit aussi au déplacement du miroir, ce dernier réagissant à son tour au changement dans la pression de radiation. Ceci n'était pas le cas dans l'interféromètre classique étudié auparavant, la pression de radiation restant constante quoiqu'il arrive. Comme on l'a vu au chapitre 4, un déplacement des miroirs s'imprime sur la seconde quadrature alors que la force de pression de radiation est liée à la première quadrature (voir les équations (4.16) et (4.45)), cette réaction induite par le ressort optique implique ainsi la création de corrélations entre bruit de grenaille et bruit de pression de radiation. Celles-ci se manifestent clairement dans les équations (5.17) au travers des coefficients C_{12} et C_{21} . Les résonances liées à la cavité de recyclage amplifie ainsi le signal tandis que ces corrélations empêchent le bruit quantique de s'amplifier par la même occasion [74]. Ainsi, le rapport signal/bruit s'améliore et la sensibilité de l'interféromètre dépasse la limite quantique standard.

Remarquons que le recyclage de signal est complémentaire aux deux techniques de réduction du bruit quantique présentées précédemment. Un calcul prenant en compte ces trois méthodes peut être trouvé dans [5,79]. Aucune technique n'en invalide une autre et l'implémentation des trois réduirait donc grandement le bruit quantique.

5.4 Argument général sur la limite quantique standard

Avant de cloturer ce chapitre, il serait bon de faire une dernière remarque sur un effet que l'on a rencontré de manière récurrente lors de notre recherche sur le dépassement de la limite quantique standard : les corrélations entre opérateurs de quadrature \hat{a}_c et \hat{a}_s à la sortie de l'interféromètre. Nous l'avons vu, à chaque fois que la limite quantique standard est dépassée, ces corrélations apparaissent. Ce n'est bien sûr pas un hasard et un argument venant de la théorie de la mesure quantique permet de l'expliquer. En effet, il est possible de démontrer la relation générale suivante [66]

$$S_{ZZ}S_{\mathcal{F}\mathcal{F}} - S_{Z\mathcal{F}}S_{\mathcal{F}Z} \geq \hbar^2 \quad (5.29)$$

qui est assez similaire à l'inégalité d'Heisenberg hormis le second terme. Les quantités S_{ZZ} et $S_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ sont respectivement les densités spectrales du bruit de grenaille et du bruit de pression de radiation tandis que $S_{Z\mathcal{F}}$ et $S_{\mathcal{F}Z}$ sont les densités spectrales liées aux corrélations entre ces deux bruits. Lorsque ces dernières sont nulles, comme dans le cas d'un interféromètre classique, on a

$$S_{ZZ}S_{\mathcal{F}\mathcal{F}} \geq \hbar^2. \quad (5.30)$$

Les densités spectrales du bruit quantique sont donc reliées entre elles de manière similaires à la variance de deux observables dans l'inégalité d'Heisenberg, d'où l'apparition de la limite quantique standard. Toutefois, on remarque qu'en créant correctement des corrélations entre les

2. On peut voir sur la Figure 5.8 un autre effet appelé anti-ressort optique. Celui-ci est l'exact opposé du ressort optique, la force de pression de radiation poussant le miroir dans le même sens que le déplacement. Cet effet ne nous intéresse pas ici.

deux sources de bruit quantique, il est possible d'alléger l'inégalité (5.30) et donc de dépasser la limite quantique standard. C'est bien ce que nous avons démontré dans les trois sections précédentes.

Conclusion

Parvenir à faire passer l'astronomie à ondes gravitationnelles de la fiction à la réalité est et sera sûrement l'un des plus grands succès du début de ce 21^e siècle. Tout ceci n'aurait pas été possible sans tout le travail effectué en amont afin d'obtenir des interféromètres aussi performants, permettant d'enfin détecter la faible variation dans la métrique de l'espace-temps due au passage d'une onde gravitationnelle. Ce mémoire s'est donné comme objectif de présenter les différentes techniques ayant permis d'obtenir un tel niveau de précision et de surtout donner un aperçu des prochaines modifications qui permettront de dépasser la limite quantique standard.

Dans ce cadre, nous avons vu au premier chapitre que les interféromètres se devaient d'être les plus longs possibles afin de maximiser l'effet d'une onde gravitationnelle. Le projet Cosmic Explorer prévoit ainsi des bras de 40 km alors que ceux de LIGO ne sont longs que de 4 km. En vue de ce même objectif, l'installation de cavités Fabry-Perot dans chaque bras permet aussi d'améliorer la réponse de l'instrument. Enfin, toute une série de bruits, en dehors du bruit quantique, doivent être maîtrisés afin qu'ils ne dissimulent pas le faible signal résultant de l'interaction entre l'interféromètre et une onde gravitationnelle. Nous avons présenté les différents types de bruit et quelques façons de les réduire. Notons ici une dernière fois que ces différentes sources de bruit doivent être examinées dans leur ensemble car certaines solutions pour l'une peuvent être catastrophiques pour d'autres.

De nombreux projets de recherche sont actuellement en cours afin de réduire l'ensemble des bruits présents dans les interféromètres. Il est ainsi prévu que la sensibilité des interféromètres de troisième génération (le télescope Einstein et Cosmic Explorer) soit améliorée d'au moins un facteur 10. Il serait par exemple possible de détecter la quasi totalité des fusions de trous noirs de quelques dizaines de masses stellaires se produisant dans l'univers observable. On s'attend ainsi à une détection de coalescence toutes les 15 secondes environ ! Une telle fréquence de détection demandera une grande puissance de calcul couplée à des méthodes d'analyse du signal performantes.

Nous avons introduit ce travail en expliquant que la limite quantique standard dans le cas d'une mesure continue provenait, en toute généralité, de la somme de deux bruits différents, le bruit de mesure et le bruit de réaction, ayant tous deux la même origine : le caractère profondément quantique des phénomènes naturels. Sur base des développements effectués dans le chapitre 4, nous pouvons à présent clairement identifier ces deux bruits dans le cas d'un interféromètre Michelson. Le bruit de mesure correspond au bruit de grenaille tandis que le bruit de réaction correspond au bruit de pression de radiation. Leur origine provient de la quantification du champ électromagnétique et à l'arrivée aléatoire des quantas de lumière sur le photodétecteur de l'instrument ou sur les miroirs des cavités Fabry-Perot. Nous l'avons vu, l'existence de la limite quantique standard est due à la différence de comportement entre le bruit de grenaille et le bruit de pression de radiation par rapport à l'intensité lumineuse. En effet, en prenant en compte la fonction de transfert, nous avons vu que ce premier bruit diminuait avec l'intensité lumineuse tandis que le second augmentait avec celle-ci. Vu l'importance prépondérante que le bruit quantique aura dans les futurs détecteurs, relativement aux autres sources de bruit, une telle limite sur la précision ultime des instruments imposées par les lois de la mécanique quantique menaçait très dangereusement le futur de l'astronomie à ondes gravitationnelles.

Heureusement, différentes techniques ont été théorisées afin de dépasser la limite quantique standard. Nous en avons présenté trois au dernier chapitre : l'injection d'états comprimés dépendants de la fréquence, la lecture variationnelle dépendante de la fréquence et le recyclage de signal. De loin, l'injection des états comprimés est la méthode qui attire le plus d'attention pour le moment, car des états comprimés sont déjà injectés dans les interféromètres LIGO et Virgo depuis le 1er avril et que la dépendance en fréquence devrait être installée prochainement. Nous sommes donc à la veille de l'aboutissement de plusieurs décennies de recherches et d'expérimentations depuis la publication de Carlton Caves en 1981.

Finalement, nous avons terminé ce travail par une courte remarque sur le fait que les trois techniques présentées pour dépasser la limite quantique standard partageaient un point commun : la création de corrélations entre bruit de grenaille et bruit de pression de radiation. Précisons que ce n'est pas la seule approche permettant de diminuer le bruit quantique. Il existe par exemple le vélocimètre qui consiste à mesurer non pas la position relative des miroirs de l'interféromètre mais leur vitesse relative. Il se fait que la mesure de la vitesse des miroirs est moins contrainte par l'inégalité d'Heisenberg que la mesure de leurs positions. Ceci résulte en un bruit de réaction largement réduit dans le cas d'un vélocimètre et la limite quantique standard est ainsi beaucoup moins coercitive [80]. Pour l'instant, le vélocimètre n'en est toujours qu'au stade de concept et il existe une recherche active afin de concevoir le dispositif le plus à même de le concrétiser. Un premier prototype est actuellement en construction à Glasgow et devrait permettre de prouver expérimentalement si le vélocimètre est bien à la hauteur des attentes [81]. Précisons que le vélocimètre n'est pas le seul dispositif prometteur quant à la réduction du bruit quantique. La relève des mesures quantiques non destructives semble donc assurée.

Bibliographie

1. B. P. Abbott *et al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
2. D. Mason *et al.*, *Continuous force and displacement measurement below the standard quantum limit*, Nature Physics (2019).
3. M. Cerdonio *et al.*, *The ultracryogenic gravitational-wave detector AURIGA*, Class. Quantum Grav. **14**, 1491-1494 (1997).
4. C. Bond *et al.*, *Interferometer techniques for gravitational-wave detection*, Living Rev. Relativity **19**, 3 (2016).
5. M. Bassan, *Advanced Interferometers and the Search for Gravitational Waves*, Springer International Publishing, Switzerland, 2014.
6. J. B. Hartle, *Gravity : An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco, 1972.
7. B. Sathyaprakash, B. Schutz, *Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves*, Living Rev. Relativity **12**, 2 (2009).
8. S. L. Danilishin, F. Ya. Khalili, *Quantum Measurement Theory in Gravitational-Wave Detectors*, Living Rev. Relativity **15**, 5 (2012).
9. P. R. Saulson, *If light waves are stretched by gravitational waves, how can we use light as a ruler to detect gravitational waves ?*, Am. J. Phys. **65**, 501 (1997).
10. A. Melissinos, A. Das, *The response of laser interferometers to a gravitational wave*, Am. J. Phys. **78**, 1160 (2010).
11. R. Blandford, K. Thorne, *Applications of Classical Physics*, notes de cours, California Institute of Technology, 2012. URL : <http://www.pmaweb.caltech.edu/Courses/ph136/yr2012/1227.1.K.pdf>
12. B. P. Abbott *et al.*, *LIGO : the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, Rep. Prog. Phys. **72**, 076901 (2009).
13. T. Accadia *et al.*, *Virgo : a laser interferometer to detect gravitational waves*, JINST **7**, P03012 (2012).
14. J. Aasi *et al.*, *Characterization of the LIGO detectors during their sixth science run*, Class. Quantum Grav. **32**, 115012 (2015).
15. K. Danzmann *et al.*, *Laser Interferometer Space Antenna*, 2018. URL : https://www.elisascience.org/files/publications/LISA_L3_20170120.pdf
16. The LIGO Scientific Collaboration, *Instrument Science White Paper 2018*. URL : <https://dcc.ligo.org/LIGO-T1800133/public>
17. ET Science Team, *Einstein gravitational wave Telescope Conceptual Design Study*, European Commission, 2011. URL : <http://www.et-gw.eu/index.php/etdsdocument>
18. R. Abbott *et al.*, *Seismic isolation for Advanced LIGO*, Class. Quantum Grav. **19**, 1591 (2002).

19. The VIRGO Collaboration (presented by S Braccini), *The Virgo suspensions*, Class. Quantum Grav. **19**, 1623 (2002).
20. J. Harms, *Terrestrial Gravity Fluctuations*, Living Rev. Relativity **18**, 3 (2015).
21. J.-Y. Vinet, *On Special Optical Modes and Thermal Issues in Advanced Gravitational Wave Interferometric Detectors*, Living Rev. Relativity **12**, 5 (2009).
22. R. Lawrence *et al.*, *Adaptive thermal compensation of test masses in advanced LIGO*, Class. Quantum Grav. **19**, 1803 (2002).
23. W. Yam, S. Gras, M. Evans, *Multimaterial coatings with reduced thermal noise*, Phys. Rev. D **91**, 042002 (2015).
24. A. Albert *et al.*, *Search for Multimessenger Sources of Gravitational Waves and High-energy Neutrinos with Advanced LIGO during Its First Observing Run, ANTARES, and IceCube*, ApJ **870**, 134 (2019).
25. R. A. Hulse, J. H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*, Astrophys. J. **195**, L51 (1975).
26. K. Riles, *Gravitational waves : Sources, detectors and searches*, Prog. Part. Nucl. Phys. **68**, 1-54 (2013).
27. N. Yunes *et al.*, *Theoretical physics implications of the binary black-hole mergers GW150914 and GW151226*, Phys. Rev. D **94**, 084002 (2016).
28. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, *Tests of General Relativity with the Binary Black Hole Signals from the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1*, (2019). URL : <https://arxiv.org/abs/1903.04467> [gr-qc].
29. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, *Tests of General Relativity with GW170817*, (2018). URL : <https://arxiv.org/abs/1811.00364> [gr-qc].
30. S. M. Feeney *et al.*, *Prospects for Resolving the Hubble Constant Tension with Standard Sirens*, Phys. Rev. Lett. **122**, 061105 (2019).
31. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration *et al.*, *A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant*, Nature **551**, 85-88 (2017).
32. M. Maggiore, *Gravitational Waves Volume 2 : Astrophysics and Cosmology*, Oxford University Press, New York, 2018.
33. B. P. Abbott *et al.*, *GWTC-1 : A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs*, (2018). URL : <https://arxiv.org/abs/1811.12907> [astro-ph.HE].
34. L. Blanchet, *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, Living Rev. Relat. **17**, 2 (2014).
35. LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, FermiGamma-ray Burst Monitor, and INTEGRAL, *Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger : GW170817 and GRB 170817A*, Astrophys. J. Lett. **848**, L13 (2017).
36. B. Berlotti *et al.*, *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature **425**, 374-376 (2003).
37. S. Boran *et al.*, *GW170817 falsifies dark matter emulators*, Phys. Rev. D **97**, 041501 (2018).
38. B. P. Abbott *et al.*, *Tests of General Relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016).
39. H.-T. Janka, *Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **62**, 407 (2012).

40. C. D. Ott, *The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae*, *Class. Quantum Grav.* **26**, 063001 (2009).
41. H. Dimmelmeier, *Gravitational wave burst signal from core collapse of rotating stars*, *Phys. Rev. D* **78**, 064056 (2008).
42. N. Andersson *et al.*, *Gravitational waves from neutron stars : promises and challenges*, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 409-436 (2011).
43. C. M. Caves, B. L. Schumaker, *New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states*, *Phys. Rev. A* **31**, 3068 (1985).
44. C. M. Caves, B. L. Schumaker, *New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation*, *Phys. Rev. A* **31**, 3093 (1985).
45. S. M Barnett, P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Oxford University Press, Oxford, 2002
46. K. J. Blow *et al.*, *Continuum fields in quantum optics*, *Phys. Rev. A* **42**, 4102-4114 (1990).
47. G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction to Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
48. A. Furusawa, *Quantum States of Light*, Springer, Tokio, 2015.
49. W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, WILEY-VCH, Berlin, 2001.
50. L. Davidovich, *Quantum optics in cavities, Phase Space Representation, and the Classical Limit of Quantum Mechanics*, notes de cours, Pan American Advanced Study Institute, 2010. URL : <http://web.utk.edu/~pasi/davidovich.pdf>
51. N. Bogoliubov, *On a new method in the theory of superconductivity*, *Il Nuovo Cimento* **7** (6), 843-857 (1958).
52. R. Schnabel, *Squeezed states of light and their applications in laser interferometers*, *Physics Report* **684**, 1-51 (2017).
53. A. Buonanno *et al.*, *Quantum noise in laser-interferometer gravitational-wave detectors with a heterodyne readout scheme*, *Phys. Rev. D* **67**, 122005 (2003).
54. E. Oelker, *Squeezed States for Advanced Gravitational Wave Detectors*, Massachusetts Institute of Technology, 2009.
55. A. Buonanno, Y. Chen, *Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors*, *Phys. Rev. D* **64**, 042006 (2001).
56. H. Miao, *Exploring Macroscopic Quantum Mechanics in Optomechanical Devices*, Springer, Berlin, 2012.
57. R. Weiss, *Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna*, Quarterly Progress Report **105**, Research Laboratory Electronics, MIT, 1972.
58. C. M. Caves, *Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer*, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 75 (1980).
59. C. M. Caves, *Quantum-mechanical noise in an interferometer*, *Phys. Rev. D* **23**, 1693 (1981).
60. H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne and S. P. Vyatchanin, *Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics*, *Phys. Rev. D* **65**, 022002 (2002).
61. A.A. Clerk *et al.*, *Introduction to Quantum Noise, Measurement and Amplification*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1155 (2010).
62. V. B. Braginski *et al.*, *Noise in gravitational-wave detectors and other classical-force measurements is not influenced by test-mass quantization*, *Phys. Rev. D* **67**, 082001 (2003).

63. C. Wipf, *LIGO Voyager Update*, (2017).
URL : <https://dcc.ligo.org/LIGO-G1700848/public>.
64. S. Chua, *Quantum Enhancement of a 4 km Laser Interferometer Gravitational-Wave Detector*, Springer, Suisse, 2015
65. Y. Chen, *Macroscopic Quantum Mechanics : Theory and Experimental Concepts of Optomechanics*, J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys. **46**, 10 (2013).
66. V.B. Braginski, F. Khalili, *Quantum Measurement*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
67. H. Grote *et al.*, *First Long-Term Application of Squeezed States of Light in a Gravitational-Wave Observatory*, Phys. Rev. Lett. **110**, 181101 (2013).
68. K. L. Dooley *et al.*, *GEO600 and the GEO-HF upgrade program : successes and challenges*, Class. Quantum Grav. **33**, 075009 (2016).
69. The LIGO Scientific Collaboration, *A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit*, Nature Physics **7**, 962-965 (2011).
70. The LIGO Scientific Collaboration, *Enhancing the sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light*, Nature Photonics **7**, 613-619 (2013).
71. W. G. Unruh, *Quantum Optics, Experimental Gravitation, and Measurement Theory*, Plenum Press, New York 1983.
72. M. T. Jaekel, S. Reynaud, *Quantum Limits in Interferometric Measurements*, Europhys. Lett. **13**, 301 (1990).
73. H. Miao *et al.*, *Quantum limit for laser interferometric gravitational wave detectors from optical dissipation*, Physical Review X **9**, 1 (2019).
74. A. Buonanno, Y. Chen, *Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs*, Phys. Rev. D **65**, 042001 (2002).
75. The LIGO Scientific Collaboration, *Advanced LIGO*, 2014. URL : <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1411/1411.4547.pdf>
76. Y. Chen, *Topics of LIGO Physics : Quantum Noise in Advanced Interferometers and Template Banks for Compact-Binary Inspirals*, California Institute of Technology, 2003.
77. J. Mizuno *et al.*, *Resonant sideband extraction : a new configuration for interferometric gravitational wave detectors*, Phys. Lett. A **175**, 273 (1993).
78. A. Buonanno, Y. Chen, *Laser-interferometer gravitational-wave optical spring detectors*, Class. Quantum Grav. **19**, 1569 (2002).
79. A. Buonanno, Y. Chen, *Improving the sensitivity to gravitational-wave sources by modifying the input-output optics of advanced interferometers*, Phys. Rev. D **69**, 102004 (2004).
80. S. L. Danilishin *et al.*, *Speedmeter scheme for gravitational-wave detectors based on EPR quantum entanglement*, Light : Science and applications **7**, 11 (2018).
81. C. Gräf *et al.*, *Design of a speed meter interferometer proof-of-principle experiment*, Class. Quantum Grav. **31**, 215009 (2014).