



Faculté des Sciences
Département de physique

Etude de nouvelles représentations d'états multiqubits symétriques

BALTUS GRÉGORY

Promoteur : MARTIN JOHN

Travail de fin d'études présenté
en vue de l'obtention du grade de
Maître en Sciences Physiques

Année académique 2017-2018

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier chaleureusement mon promoteur le professeur John Martin, pour ses disponibilités, ses relectures, ses conseils et nos nombreuses discussions tout au long de ce mémoire. Plus généralement pour son encadrement, qui fut pour moi irréprochable.

Je voudrais également remercier très sincèrement ma marraine pour ses relectures et corrections orthographiques, autant que ma maman et Lindsay Jehasse pour avoir relu certaines parties de ce mémoire. Leur soutien fut une véritable source de motivation durant toute cette année.

Je souhaite également remercier Pierre Baibai, pour nos discussions, et notre soutien mutuel, tout au long de ces deux années de Master. Plus généralement, je remercie tous les amis que j'ai rencontrés durant ces études.

Enfin, je remercie ma famille qui m'a toujours soutenu et cru en moi, et qui a fait en sorte que je puisse réaliser tout ce parcours scolaire dans les meilleures conditions possibles.

*I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.*¹

Richard Feynman

1. So, don't worry if you don't understand this master thesis.

Table des matières

Introduction	1
1 Système multiqubits et intrication	5
1.1 L'espace de Hilbert	5
1.2 Système à un qubit	6
1.2.1 Définition d'un qubit et de la sphère de Bloch	6
1.2.2 Information quantique et qubits	6
1.2.3 Représentation physique de qubits	7
1.3 Les systèmes multiqubits	8
1.3.1 Les états à plusieurs particules	8
1.3.2 Le sous-espace symétrique	9
1.3.3 Le sous-espace symétrique d'un système multiqubits	10
1.4 Les états intriqués	10
1.4.1 Les classes d'intrication	11
1.4.2 Mesures d'intrication	12
2 Diverses représentations d'états multiqubits symétriques	15
2.1 La représentation de Dicke	16
2.1.1 Correspondance entre les vecteurs de Dicke et les états de spin	17
2.2 La représentation de Majorana	18
2.2.1 Passage de la représentation de Dicke à Majorana	19
2.2.2 Passage de la représentation de Majorana à celle de Dicke	20
2.2.3 Projection stéréographique et transformation de Möbius	21
2.3 La représentation DMPS	23
2.3.1 Lien avec les <i>Matrix Product States</i>	26
2.3.2 La bond dimension	27
2.3.3 Passage de la représentation de Dicke à la représentation DMPS et vice-versa	28
2.3.4 Diverses représentations DMPS	28
2.4 La représentation de Mandilara <i>et al.</i>	30
2.4.1 La forme canonique LOCC	32
2.4.2 La forme canonique SLOCC	34
2.4.3 Passage de la représentation de Dicke à Mandilara <i>et al.</i>	35
2.4.4 Passage de la représentation de Mandilara <i>et al.</i> à Dicke	40
2.4.5 Passage de la représentation de Mandilara <i>et al.</i> à la représentation DMPS	40
2.4.6 Lien entre la représentation de Mandilara <i>et al.</i> et la bond dimension	40
2.5 Tableau récapitulatif des représentations	41

3	Illustration des différentes représentations	43
3.1	Etats GHZ à N qubits	43
3.1.1	Etats GHZ dans la représentation de Dicke	43
3.1.2	Etats GHZ dans la représentation de Majorana	45
3.1.3	Etats GHZ dans la représentation de Mandilara <i>et al.</i>	47
3.1.4	Etats GHZ dans la représentation DMPS	47
3.1.5	Tableau récapitulatif des représentations du GHZ	51
3.2	Etats polygones	53
3.2.1	Etats polygones réguliers dans la représentation de Dicke	53
3.2.2	Etats polygones dans la représentation de Majorana	53
3.2.3	Etats polygones réguliers dans la représentation de Mandilara <i>et al.</i>	54
3.2.4	Etats polygones réguliers dans la représentation DMPS	58
3.2.5	Tableau récapitulatif des représentations des états polygones réguliers	59
3.3	Etats de la base de Dicke	61
3.3.1	Etats de Dicke dans la représentation de Dicke	61
3.3.2	Etats de la base de Dicke dans la représentation de Majorana	61
3.3.3	Etats de la base de Dicke dans la représentation de Mandilara <i>et al.</i>	61
3.3.4	Les états de Dicke dans la représentation DMPS	62
3.3.5	Tableau récapitulatif des représentations des états de Dicke	65
	Conclusion	68
	Bibliographie	70

Introduction

L'intrication

L'intrication est probablement un des phénomènes les plus étranges et exotiques qu'apporte la physique quantique. L'intrication paraît tellement surprenante, qu'elle a fait douter de nombreux physiciens dont, Albert Einstein, de la véracité de la mécanique quantique. Si deux particules sont intriquées, alors agir sur l'une va également avoir un effet sur la seconde. En d'autres termes, effectuer une mesure sur une particule va non seulement projeter l'état de cette particule mais plus généralement l'état global des deux particules intriquées. C'est cette action à distance qui est à la base du paradoxe EPR [1] qu'ont formulé Einstein, Podolsky et Rosen en 1935. Einstein et ses défenseurs ne croyaient pas en l'intrication, du moins dans le sens d'une action à distance instantanée. Ils ne pouvaient pas accepter qu'une information se déplace plus rapidement que la vitesse de la lumière. Ils proposèrent donc que la mécanique quantique était une théorie incomplète, et, ils introduisirent en même temps, le concept de variables cachées. Cette nouvelle notion stipule qu'il existe des variables, qui nous sont encore inconnues, qui permettraient de définir exactement à l'avance tous les résultats de mesure que l'on peut obtenir sur un système. La notion d'intrication prend alors un autre sens. Deux particules intriquées auraient en fait toutes deux un état déjà bien déterminé, et ainsi, mesurer l'état d'une particule permettrait de connaître l'état de l'autre. Ainsi, nul besoin d'une action à distance. Cette interprétation semble plus naturelle et moins surprenante que celle de la théorie quantique, mais elle est erronée. En 1964, John Bell a montré que la théorie des variables cachées est falsifiable [2]. La preuve expérimentale de la violation des inégalités de Bell par A. Aspect a mis fin au débat EPR [3], et impose la théorie quantique et son interprétation de l'intrication.

La manière dont l'information est contenue dans un système intriqué est également surprenante. Contrairement au cas classique, l'information contenue dans un système intriqué n'est pas seulement la somme de l'information contenue dans chaque sous-système. Autrement dit, la connaissance de l'état de chaque particule ne suffit pas à déterminer l'état global du système. On dit qu'il y a une délocalisation de l'information. Cette propriété n'a pas d'équivalent classique. Les états intriqués sont un nouvel outil sans équivalent classique pour la théorie de l'information. Certaines personnes, comme Peter Shor, ont eu l'idée d'utiliser ces états pour effectuer des calculs. Peter Shor développa en 1994 un algorithme qui utilise les états intriqués pour encoder et manipuler l'information [4]. Il s'agit d'un des premiers algorithmes quantiques. Cette méthode permet de factoriser un nombre entier en facteurs premiers en un nombre d'étapes bien plus faible que les méthodes classiques. L'intérêt des états intriqués pour la théorie de l'information devient clair ; les algorithmes quantiques permettent de résoudre certains problèmes en des temps beaucoup plus courts que les algorithmes classiques. La théorie est là, il faut maintenant construire des dispositifs expérimentaux mettant en oeuvre un ordinateur quantique permettant de faire tourner de tels algorithmes.

Que ce soit pour sa nature étrange et surprenante ou pour les applications qu'elle peut avoir, l'étude de l'intrication est un sujet passionnant, mais compliqué. Un système composite peut être intriqué de bien des façons différentes. L'information n'est pas délocalisée de la même manière pour tous les états intriqués. Certains de ces états partagent certaines propriétés, comme par exemple : qu'ils restent intriqués après la perte d'une de leurs particules. Pour ces raisons, il est important d'introduire des mesures de l'intrication. Il n'existe pas de mesure qui fait consensus. Beaucoup de chercheurs ont introduit leurs propres mesures d'intrication [5-10]. En plus, de toutes ces mesures, des classifications des états intriqués ont été introduites, c'est-à-dire des manières de regrouper en classe les états intriqués qui partagent des propriétés similaires. Pour étudier plus facilement la répartition en classe ou les mesures d'intrication ou même juste les visualiser autrement, il est parfois intéressant d'exprimer les états intriqués de façons différentes : d'introduire de **nouvelles représentations** [5, 6].

Objectifs et intérêts du mémoire

Ce mémoire étudie les systèmes constitués de plusieurs qubits. Plus spécifiquement, il se concentre sur deux nouvelles représentations d'états quantiques symétriques de système multiqubit : la représentation *Diagonal Matrix Product States (DMPS)* [5], introduite en 2016, et la représentation de *Mandilara et al.* [6], publiée en 2014. Pour pouvoir les étudier et les définir, il est essentiel d'introduire deux autres représentations : la représentation de *Dicke* [7] et de *Majorana* [8]. Un premier objectif sera de présenter toutes ces représentations, mais également d'établir les liens entre elles, et comment passer de l'une à l'autre. La représentation DMPS et la représentation de Mandilara *et al.* ont été introduites récemment et de façon indépendante. Néanmoins, elles possèdent certaines similitudes. Nous nous sommes donc fixés comme objectif d'investiguer plus attentivement ces deux représentations pour étudier les liens qui pourraient exister entre elles et si l'on peut déduire de nouveaux résultats en prenant en considération ces deux représentations.

Comme déjà mentionné, beaucoup d'efforts ont été et sont actuellement fournis pour classifier les différents états intriqués. En effet, comme il existe une infinité d'états intriqués dès 2 qubits, il est intéressant de les rassembler par classes, pour, par exemple, savoir quels états sont équivalents dans le sens où ils peuvent être utilisés comme ressource pour une même expérience. Il existe de nos jours deux grands types de classe : les *classes LOCC* et les *classes SLOCC*² [9]. Il sera expliqué au chapitre suivant comment sont définies ces classes et pourquoi elles sont utiles. Néanmoins, on peut déjà énoncer un problème de ces classifications : pour un système constitué de 4 qubits ou plus : le nombre de classes SLOCC (ou même LOCC) est infini [10, 5]. Ceci peut poser problème car, les classes ont notamment été introduites pour regrouper l'infinité d'états intriqués ; si il y a une infinité de classes, cela perd un peu de son sens. De plus, avec une infinité de classes, il n'est pas évident de trouver une méthode pour toutes les expliciter. C'est pour proposer des solutions à ces problèmes qu'ont été introduites les représentations de Mandilara *et al.* et DMPS. La représentation DMPS introduit un nouveau concept : *l'optimal bond dimension*. Grâce à celle-ci, il est possible de regrouper les classes d'intrication SLOCC en famille, qui sont elles en nombre fini³. La représentation de Mandilara *et al.* propose, elle, une méthode pour déterminer un "représentant" (appelé forme canonique) de chaque classe LOCC ou SLOCC. Ceci permet de déterminer à quelle classe appartient un état. Il est à noter

2. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement aux classes LOCC et SLOCC pour le cas de systèmes multiqubits. Mais ces classes sont également définies pour des systèmes multiqubits.

3. Le nombre de familles croît linéairement avec le nombre de qubits qui constituent le système [5].

que la méthode de Mandilara *et al.* ne s'applique pas à tous les états du sous-espace symétrique, mais uniquement aux états dit génériques, qui représentent néanmoins une large majorité des états. Ces notions seront abordées et définies dans les chapitres suivants. On comprend maintenant mieux l'intérêt d'étudier ces deux représentations : elles offrent des possibilités de mieux caractériser la classification des états intriqués.

On peut encore citer une motivation plus technique de ce mémoire, et, plus généralement, de l'étude de la représentation de Mandilara *et al.*. Cette représentation est définie uniquement pour certains états appelés états génériques. Dorian Baguette *et al.* ont montré que dans les classes SLOCC d'états non-génériques, il n'existe pas d'état maximalelement intriqué⁴ [11]. Survient alors une question : *est-ce que toutes les classes d'états génériques contiennent au moins un état maximalelement intriqué*? Pour tenter de répondre à cette question, ce mémoire se propose d'étudier les formes canoniques introduite par Mandilara *et al.*, et de voir si elles sont maximalelement intriquées.

En plus d'effectuer une synthèse de différentes représentations d'états symétrique de systèmes multiqubits et d'étudier les liens qui existent entre la représentation DMPS et de Mandilara *et al.*, nous obtenons, dans ce mémoire, l'expression d'états emblématiques de la théorie de l'information quantique dans diverses représentations. Dans ce but, des codes Mathematica ont été développés permettant de décomposer ces états dans chaque représentation. Les états étudiés sont notamment ceux ayant une importance particulière au niveau expérimental, tels les états de Dicke et le GHZ. L'intérêt de cette étude est évidemment de mieux caractériser ces états mais également d'illustrer avec des exemples précis les différentes représentations, notamment celles de Mandilara *et al.* et DMPS.

Organisation du mémoire

Le chapitre 1 introduit la notion de sous-espace symétrique d'un système multiqubit. Dans ce but, nous présentons des rappels de mécanique quantique. On commence par rappeler brièvement les notions de fonction d'onde et d'espace de Hilbert, pour ensuite définir ce qu'est un qubit. Des rappels sur les espaces de Hilbert d'un système de plusieurs particules sont également nécessaires. Une fois ceci effectué, nous aurons alors toutes les cartes en main pour comprendre ce qu'est un état multiqubit symétrique. Ce chapitre définit également l'intrication et les méthodes pour la caractériser : les classes d'intrication et les mesures d'intrication.

Le chapitre 2 entre dans le vif du sujet. Maintenant que la notion d'état multiqubit symétrique est bien assimilée, on présente les différentes représentations de tels états. On commence par la représentation la plus standard et naturelle : la représentation de Dicke. Cette représentation découle directement de la symétrisation de la base computationnelle. Ensuite vient le tour de la représentation de Majorana qui est, tout comme la représentation de Dicke, bien connue et fortement utilisée. Elle présente comme avantage d'avoir une interprétation géométrique. On peut ainsi visualiser géométriquement un état d'un système multiqubits par un ensemble de points sur une sphère. Ces deux premières représentations sont connues et étudiées depuis longtemps. Ensuite, deux autres représentations plus récentes ("les nouvelles représentations") sont présentées. La première est la représentation DMPS. La notion d'*optimal bond dimension* est également introduite. Ce concept est

4. Il existe plusieurs définitions d'états maximalelement intriqués. Nous parlons ici d'états maximalelement intriqués au sens d'une entropie d'intrication maximale. Ces notions sont définies dans le chapitre 1.

l'intérêt premier de la représentation DMPS et, elle a également un lien avec les mesures et les classes d'intrication. La dernière représentation à être décrite dans ce mémoire est celle de Mandilara *et al.*. Contrairement aux trois autres, cette représentation ne s'applique pas à tous les états multiqubits symétriques. Néanmoins, elle donne une méthode puissante, à travers ses notions de formes canoniques, pour caractériser les classes d'intrication. Des liens permettant le passage d'une représentation à une autre ont également été établis et sont présentés dans ce chapitre.

En plus du travail de synthèse effectué dans ce mémoire, faisant principalement l'objet du chapitre 2, nous avons écrit des routines Mathematica permettant d'obtenir les différentes représentations pour plusieurs états. Ces codes constituent d'ailleurs une grande partie du travail fourni dans le cadre de ce mémoire. Grâce à eux, nous avons pu étudier certains états dans diverses représentations. **Le chapitre 3** résume les résultats de l'étude de ces états. Le premier état étudié est l'état Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)[12]. Il s'agit d'un état bien connu et déjà beaucoup étudié et utilisé dans le cadre de la théorie de l'information quantique, notamment en cryptographie quantique [13]; ensuite, nous étudierons les états polygones réguliers, qui sont une généralisation de l'état GHZ. Enfin, les états de Dicke, dont notamment l'état W, sont décomposés et étudiés dans les différentes représentations. Cette étude systématique nous permet non seulement d'obtenir les expressions de ces états dans les différentes représentations, mais également d'obtenir leurs formes canoniques de Mandilara *et al.* et d'étudier les bond dimensions dans les représentations DMPS.

Le mémoire se termine par une conclusion qui résume les différents résultats obtenus et présente succinctement quelques perspectives.

Chapitre 1

Système multiqubits et intrication

Ce mémoire va étudier l'intrication entre qubits. Plus particulièrement deux représentations du sous espace-symétrique d'un système multiqubits, qui donnent certains outils pour mieux caractériser l'intrication. Pour pouvoir bien comprendre toutes ces notions, il faut tout d'abord les définir. Ce sera l'objectif de ce chapitre, définir ce qu'est le sous-espace symétrique d'un système multiqubits, et les différents moyens mis en oeuvre pour caractériser l'intrication dans de tels espaces.

Pour pouvoir définir le sous-espace symétrique d'un système multiqubit, il faut en premier lieu rappeler comment est décrit un système physique en mécanique quantique. Ceci nous permet alors de définir la notion de qubit. Ensuite, il faut rappeler comment l'on décrit l'état d'un système constitué de plusieurs particules, et comment est défini le sous-espace symétrique. Une fois cela effectué, il sera alors possible de définir le sous-espace symétrique d'un système multiqubits.

Cette notion étant définie, on peut alors définir l'intrication dans ce sous-espace, et les différentes notions permettant de la caractériser : les classes d'intrication et les mesures d'intrication.

1.1 L'espace de Hilbert

Avant de pouvoir définir ce qu'est un qubit ou comment on décrit son état, quelques rappels généraux de mécanique quantique s'imposent. Il faut notamment rappeler comment est décrit l'état d'un système physique, ainsi que la notion d'espace de Hilbert. En physique quantique, un système est décrit par une fonction d'onde. Celle-ci est un vecteur ket normé appartenant à un espace de Hilbert. Cet espace dépend du système ; il peut être de dimension finie ou infinie. Comme tout espace vectoriel, la dimension de cet espace est le nombre minimum de vecteurs kets linéairement indépendants qu'il faut pour pouvoir générer tout l'espace par combinaison linéaire de ces vecteurs. Ce mémoire va s'intéresser aux espaces de Hilbert de dimension finie. Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert de dimension D , alors il existe une base orthonormée de D vecteurs $\{|\phi_i\rangle, i = 1, \dots, D\}$ tel que n'importe quel vecteur $|\psi\rangle$ puisse s'écrire sous la forme

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^D c_i |\phi_i\rangle \quad (1.1)$$

avec les coefficients $c_i \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=1}^D |c_i|^2 = 1$. La décomposition (1.1) est unique. Une fois que l'on a fixé une base, il est commun de caractériser les vecteurs de l'espace de Hilbert uniquement par

un vecteur composé des coefficients c_i

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^D \quad (1.2)$$

Il est également important de rappeler ici que deux vecteurs kets qui diffèrent uniquement par une phase globale, i.e.

$$|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle \quad (1.3)$$

avec θ un nombre réel, représentent le même état physique. Ainsi, on peut toujours choisir d'écrire un vecteur $|\psi\rangle$ comme un vecteur ket $|\psi'\rangle$ en choisissant arbitrairement la phase θ .

Le système physique qui se trouve dans l'état $|\psi\rangle$ évolue dans le temps conformément à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \quad (1.4)$$

avec \hbar la constante de Plank réduite et \hat{H} l'opérateur Hamiltonien du système physique.

1.2 Système à un qubit

1.2.1 Définition d'un qubit et de la sphère de Bloch

Maintenant que la notion d'espace de Hilbert a été introduite, on peut définir ce qu'est un qubit. **Un qubit est n'importe quel système physique dont son état est décrit par un vecteur ket appartenant à un espace de Hilbert de dimension 2.** On notera l'espace de Hilbert d'un qubit \mathcal{H}_q et les vecteurs de base de cet espace $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Ainsi, tout état à un qubit $|\psi\rangle$ peut s'exprimer sous la forme

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.5)$$

avec α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Cette condition vient du fait que le vecteur $|\psi\rangle$ doit être normé. Comme on a le choix de la phase pour décrire l'état d'un système, en multipliant ce vecteur ket $|\psi\rangle$ par un facteur de phase on peut le réécrire comme suit

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \quad (1.6)$$

où les angles θ et φ sont des réels appartenant respectivement à $[0, \pi]$ et à $[0, 2\pi[$. Cette notation pour décrire l'état des qubits est très souvent utilisée. Elle va nous permettre d'introduire la **sphère de Bloch**. Celle-ci est une représentation géométrique de l'état d'un qubit. Comme il vient d'être mentionné, on peut écrire tout qubit sous la forme (1.6) et il est ainsi caractérisé uniquement par deux nombres réels : θ et φ . On représente ce qubit comme un point d'angles polaire et azimutal θ et φ sur une sphère de rayon unité qui porte alors le nom de sphère de Bloch. On remarque que dans cette représentation le pôle nord représente l'état $|0\rangle$ et le pôle sud l'état $|1\rangle$, voir Figure 1.1.

1.2.2 Information quantique et qubits

On profite ici que l'on a introduit la notion du qubit pour discuter l'utilité pratique de tels états. Le mot qubit provient des mots "*quantum*" et "*bit*". Il s'agit en fait de la version quantique d'un bit.

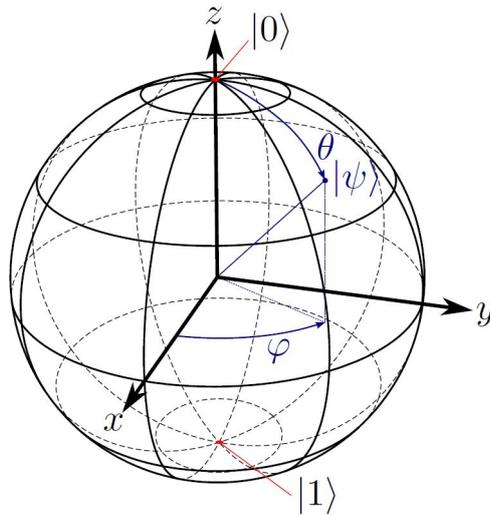


FIGURE 1.1 – Représentation de l'état $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle$ sur la sphère de Bloch. Cette image provient de [11].

Comme ce dernier, le qubit est une notion qui, comme on l'a vu, peut être implémentée physiquement de diverses façons. Il constitue la brique élémentaire de l'informatique quantique, c'est-à-dire : l'unité la plus simple dans laquelle on peut encoder de l'information. Contrairement au bit qui ne peut prendre que deux valeurs 0 ou 1, le qubit peut se retrouver dans une superposition de ces deux valeurs (équation (1.5)). Avec deux qubits, l'état du système peut se retrouver dans une superposition de quatre états, $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$. Et ainsi, un système de N qubits peut se trouver dans une superposition de 2^N états.

Tout l'enjeu de l'information quantique est de construire des algorithmes qui soient capables d'exploiter cette superposition d'états. En utilisant correctement cette superposition, on pourrait effectuer autant de calculs en parallèle qu'il y a d'états superposés. C'est pourquoi un ordinateur quantique pourrait être beaucoup plus rapide qu'un ordinateur classique, comme c'est, par exemple, le cas pour le problème de décomposition en facteurs premiers et l'algorithme de Shor [4]. Il est également à noter qu'extraire l'information d'un algorithme quantique est moins évident que pour son équivalent classique.

1.2.3 Représentation physique de qubits

Ainsi, tout système physique dont l'espace de Hilbert est de dimension 2 représente un qubit potentiel. En pratique, il existe donc beaucoup de systèmes qui peuvent servir à définir des qubits. On en décrit ici brièvement quelques uns.

- **La polarisation du photon :** Un photon possède deux états de polarisation, circulaire droit et circulaire gauche. Tout autre état de polarisation peut être vu comme une combinaison linéaire de ces deux polarisations de base. Son espace de Hilbert est bien de dimension 2. Ainsi, l'état de polarisation d'un photon peut être vu comme l'état d'un qubit. Cette représentation physique de qubits a déjà eu beaucoup d'applications notamment en téléportation quantique[14]. Elle a pour avantage qu'il est, d'un point de vue expérimental, relativement aisé d'intriquer des photons [15].

- **L'état de spin nucléaire.** Certains noyaux possèdent un spin *up* ou un spin *down*. Lorsqu'il n'est pas observé, le spin peut se trouver dans une combinaison linéaire de ces deux états de base. L'état de spin de certains noyaux est donc bien un qubit. Il existe des applications qui utilisent le spin nucléaire comme qubit, notamment certains ordinateurs quantiques [16].
- **L'état de spin d'un électron.** Le spin de l'électron peut être soit *up* ou soit *down*. Tout comme pour le spin nucléaire, l'état de spin d'un électron peut se retrouver dans une superposition des états de base. L'état de spin de l'électron est donc lui aussi un qubit. Ce genre de qubits a également eu des applications en information quantique [17].
- **Les ions piégés.** L'état de ces qubits est l'état électronique des ions piégés. Ce système est particulièrement utile pour les ordinateurs quantiques. Dans de tels ordinateurs c'est l'interaction Coulombienne qui assure le lien entre les atomes piégés [18].
- **SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) :** Un SQUID est un magnétomètre généralement utilisé pour mesurer des champs magnétiques très faibles. Généralement il est constitué d'une boucle supraconductrice et de deux jonctions Josephson. Il a été démontré qu'il est possible d'obtenir une superposition de deux flux magnétiques dans un SQUID [19], et ainsi d'obtenir un qubit.
- **Nitrogen-Vacancy center (NV center)** Un NV center est un défaut (un atome d'azote) dans le diamant. On utilise le spin de cet atome (nucléaire ou électronique) pour former un qubit. L'avantage de ce système est que le diamant peut se trouver à température ambiante [17].

La liste est loin d'être exhaustive. Ainsi, toutes sortes de systèmes fort différents peuvent implémenter un qubit, que ce soit des atomes isolés, des photons, des défauts dans un matériau ou même des circuits supra-conducteurs. La recherche de systèmes permettant d'implémenter des qubits est un sujet d'actualité et comporte beaucoup d'applications : ordinateur quantique, téléportation quantique, etc...

1.3 Les systèmes multiqubits

1.3.1 Les états à plusieurs particules

On s'intéressera dans ce mémoire à des systèmes composés de plusieurs qubits. Il est donc essentiel de savoir comment se comportent des systèmes composés de plusieurs particules.

Soit un système physique composé de deux particules. Si la première est décrite par le vecteur ket $|\psi\rangle_1$ de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_1 et la seconde est décrite par le vecteur $|\psi\rangle_2$ de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_2 ; alors le système global sera décrit par le produit tensoriel des deux vecteurs

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \quad (1.7)$$

Ce vecteur ket $|\psi\rangle$ appartient à l'espace de Hilbert produit tensoriel $\mathcal{H}_{1,2} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, qui est l'espace de Hilbert du système global. On peut déjà remarquer que tous les vecteurs de $\mathcal{H}_{1,2}$ ne s'expriment pas forcément comme un produit de vecteurs appartenant à \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , c'est-à-dire comme l'équation (1.7). De tels états sont dit intriqués. Les vecteurs $|\psi\rangle$ qui s'expriment comme l'équation (1.7) sont appelés séparables. Ces notions seront abordées plus en profondeur à la section suivante.

Si l'espace de Hilbert \mathcal{H}_1 est de dimension N , et que l'ensemble $\{|\phi_i\rangle_1, i = 1, \dots, N\}$ constitue une base de \mathcal{H}_1 , et que l'ensemble de vecteurs kets $\{|\phi_i\rangle_2, i = 1, \dots, N'\}$ est une base de \mathcal{H}_2 de dimension N' ; alors l'ensemble $\{|\phi_{i,j}\rangle_{1,2} \equiv |\phi_i\rangle_1 \otimes |\phi_j\rangle_2, i = 1, \dots, N \text{ et } j = 1, \dots, N'\}$ est une base de l'espace $\mathcal{H}_{1,2}$. On voit alors que la dimension cet espace est NN' . La base $\{|\phi_{i,j}\rangle_{1,2} \equiv |\phi_i\rangle_1 \otimes |\phi_j\rangle_2, i = 1, \dots, N \text{ et } j = 1, \dots, N'\}$ est donc la base obtenue par l'ensemble des produits tensoriels des vecteurs

de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . Une telle base porte le nom de base computationnelle. Cette construction se généralise immédiatement à des systèmes à plus de 2 particules.

Si l'état de la particule 1, respectivement la particule 2, est décrit par le vecteur $|\psi\rangle_1$, respectivement $|\psi\rangle_2$, qui s'exprime comme

$$|\psi\rangle_1 = \sum_N^{i=1} c_i |\phi_i\rangle_1 \quad (1.8)$$

$$|\psi\rangle_2 = \sum_{N'}^{i=1} c'_i |\phi_i\rangle_2 \quad (1.9)$$

alors le vecteur $|\psi\rangle_{1,2}$ peut s'écrire comme

$$|\psi\rangle_{1,2} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N'} c_i c'_j |\phi_{i,j}\rangle_{1,2} \quad (1.10)$$

Mais ce ne sont pas les seuls états possibles de l'espace $\mathcal{H}_{1,2}$. En effet, les vecteurs (1.10) sont les états séparables. Mais, en toute généralité un vecteur de $\mathcal{H}_{1,2}$ s'écrit comme

$$|\psi\rangle_{1,2} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N'} c_{i,j} |\phi_{i,j}\rangle_{1,2} \quad (1.11)$$

où $c_{i,j} \in \mathbb{C}$. Si un vecteur s'écrit comme (1.11) et ne peut pas s'écrire comme (1.10), alors, on dit qu'il s'agit d'un état intriqué. On introduit également quelques notations et conventions d'écriture pour les produits matriciels :

- $|\phi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 \equiv |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \equiv |\phi\chi\rangle$
- $\underbrace{|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes \dots \otimes |\psi\rangle}_N \equiv |\psi\rangle^{\otimes N}$
- $\underbrace{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_N \equiv \mathcal{H}^{\otimes N}$

1.3.2 Le sous-espace symétrique

Avant de pouvoir définir le sous-espace symétrique d'un système multiqubits, il reste à définir ce qu'est, en général, le sous-espace symétrique d'un espace de Hilbert à plusieurs particules. Soit, un état à N particules caractérisé par un espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\otimes N}$, avec \mathcal{H} l'espace de Hilbert pour un système à une particule. Si ces particules sont indiscernables, alors le système devrait rester inchangé lors de la permutation de particules. On introduit l'opérateur de permutation $\hat{P}_{i,j}$, qui permute la particule i avec la particule j ¹. En appliquant deux opérateurs de permutation $\hat{P}_{i,j}$ et $\hat{P}_{i',j'}$ sur un état du système, on devrait obtenir le même état, peu importe que l'on applique d'abord $\hat{P}_{i,j}$ ou $\hat{P}_{i',j'}$. On va montrer qu'il faut pour cela que les vecteurs soient des vecteurs propres de l'opérateur de permutation. Les valeurs propres de $\hat{P}_{i,j}$ sont +1 et -1. Soit un système à 3 particules $|\psi\phi\chi\rangle$. On applique l'opérateur $\hat{P}_{1,2}$ et $\hat{P}_{1,3}$

$$\hat{P}_{1,2}\hat{P}_{1,3}|\psi\phi\chi\rangle = \hat{P}_{1,2}|\chi\phi\psi\rangle = |\phi\chi\psi\rangle \quad (1.12)$$

1. L'opérateur de permutation est défini pour la permutation d'un nombre arbitraire de qubits. Quand l'on ne permute que deux qubits, on nomme parfois l'opérateur de permutation $\hat{P}_{i,j}$, l'opérateur de transposition. On le note alors $\hat{\Pi}_{i,j}$.

Or, si on applique d'abord $\hat{P}_{1,3}$ et puis $\hat{P}_{1,2}$

$$\hat{P}_{1,3}\hat{P}_{1,2}|\psi\phi\chi\rangle = \hat{P}_{1,3}|\phi\psi\chi\rangle = |\chi\psi\phi\rangle \quad (1.13)$$

On voit que l'équation (1.12) et l'équation (1.13) sont équivalentes uniquement si $|\psi\phi\chi\rangle$ est soit, un vecteur totalement symétrique (c'est-à-dire qu'il est un vecteur propre de la valeur propre +1 de l'opérateur de permutation) soit, un vecteur totalement antisymétrique (c'est-à-dire qu'il est un vecteur propre de la valeur propre -1 de l'opérateur de permutation).

On définit le sous-espace symétrique \mathcal{H}_S de l'espace \mathcal{H}

$$\mathcal{H}_S = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes N} : \hat{P}_{i,j}|\psi\rangle = |\psi\rangle \forall i, j = 1, \dots, N\} \quad (1.14)$$

Ce mémoire va se concentrer uniquement sur le sous-espace symétrique. La dimension de cet espace a le bon goût de grandir de façon linéaire avec le nombre de qubits, contrairement à l'espace $\mathcal{H}^{\otimes N}$ qui grandit de façon exponentielle avec le nombre de qubits (pour rappel, la dimension de $\mathcal{H}^{\otimes N}$ est de 2^N).

Une base du sous-espace symétrique \mathcal{H}_S est donnée par

$$\left\{ |\Phi_{k_1, \dots, k_N}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} |\phi_{k_{\sigma(1)}} \dots \phi_{k_{\sigma(N)}}\rangle \right\} \quad (1.15)$$

avec la somme sur σ qui porte sur toutes les permutations possibles, et les $|\phi_k\rangle$ sont les vecteurs de base des sous-espaces \mathcal{H} .

1.3.3 Le sous-espace symétrique d'un système multiqubits

Nous avons enfin toutes les notions nécessaires pour pouvoir définir le sous-espace symétrique d'un système multiqubits. Ce sous-espace est donc le sous-espace symétrique de l'espace $\mathcal{H}_q^{\otimes N}$ que l'on le note simplement ici \mathcal{H}_S . La base standard de cet espace est donc donnée par l'équation (1.15) et s'écrit explicitement dans le cas à 2 qubits

$$\left\{ |D_N^{(k)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!k!(N-k)!}} \sum_{\sigma} \underbrace{|1_{\sigma(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |1_{\sigma(k)}\rangle}_k \otimes \underbrace{|0_{\sigma(k+1)}\rangle \dots \otimes |0_{\sigma(N)}\rangle}_{N-k}, k = 0, \dots, N \right\} \quad (1.16)$$

Les vecteurs $|D_N^{(k)}\rangle$ portent le nom de vecteurs de Dicke symétriques, et la base (1.16) est appelée la base de Dicke symétrique. Ainsi, tous vecteurs de l'espace \mathcal{H}_S peuvent s'écrire comme

$$|\psi_s\rangle = \sum_{k=0}^N d_k |D_N^{(k)}\rangle \quad (1.17)$$

avec $d_k \in \mathbb{C}$. En réalité, cette équation est la représentation de Dicke. Elle sera explicitée plus en détail dans le chapitre suivant.

1.4 Les états intriqués

Ce mémoire s'intéresse à l'intrication, plus particulièrement à des représentations permettant de mieux la caractériser. Il est donc nécessaire de définir ce qu'est l'intrication, ainsi que les différentes

notions permettant de l'analyser. L'intrication est une caractéristique intrinsèque et propre à la physique quantique. Pour pouvoir la définir, il faut d'abord définir ce qu'est un état séparable. Ceci a déjà été effectué dans la section sur les systèmes multiqubits. Un état séparable à N qubits est donc un état qui admet la forme

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle \quad (1.18)$$

avec les états $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, \dots, N$) qui sont les états de chacun des sous-systèmes à un qubit. Un état intriqué est un état qui n'est pas séparable, c'est-à-dire qui ne peut pas s'écrire comme (1.18), mais qui s'écrit nécessairement sous la forme d'une combinaison linéaire d'états séparables

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_1^{(i)}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N^{(i)}\rangle \quad (1.19)$$

avec c_i des nombres complexes dont au moins deux sont non nuls. L'intrication met en évidence le caractère non local des propriétés d'un système constitué de plusieurs particules. En mécanique classique, pour connaître entièrement l'état d'un système, il suffit de connaître l'état de tous ses sous-systèmes. En mécanique quantique, ce n'est plus le cas, même si l'on connaît tous les états réduits des sous-systèmes, nous n'avons pas encore connaissance de l'état global. On dit qu'une partie de l'information est délocalisée² sous forme de corrélations entre les sous-systèmes.

Un système à N particules peut être intriqué d'une infinité de façons différentes (suivant la valeur des coefficients c_i dans (1.19)). Néanmoins, on constate que certains états intriqués ont des propriétés similaires pour accomplir certaines tâches. Un des grands objectifs actuels est de classifier l'intrication, c'est-à-dire de rassembler les différents états qui possèdent des propriétés d'intrication similaires. En plus de ces classes, des méthodes de mesures d'intrication ont été inventées.

1.4.1 Les classes d'intrication

Une première méthode permettant de caractériser l'intrication est d'introduire les classes d'intrication. L'objectif en introduisant de telles classes est de regrouper les états qui ont les mêmes propriétés d'intrication. Il existe deux grandes classifications, *la classification LOCC* et *la classification SLOCC*. Ces deux classifications sont construites de façon similaire : deux états appartiennent à la même classe s'il est possible de transformer un état en l'autre par un certain type de transformation. Détaillons ces deux classifications.

La classification LOCC

Pour comprendre ce qu'est une classe LOCC, il faut d'abord comprendre ce qu'est une opération locale avec communication classique (LOCC)³. Il s'agit en fait d'une procédure expérimentale qui permet de transformer avec certitude un état $|\psi_1\rangle$ en un état $|\psi_2\rangle$. On définit alors une classe LOCC, comme l'ensemble des vecteurs qui peuvent se transformer l'un en l'autre par des transformations LOCC. On dit que deux états qui appartiennent à la même classe LOCC sont LOCC-équivalents. Cette équivalence est particulièrement importante car deux états LOCC-équivalents sont d'utilité égale pour tous types d'applications. Il a été montré [20] [21] que deux états sont LOCC-équivalents si et seulement si, il existe une transformation locale unitaire (LU) qui permet de transformer un de ces états en l'autre. C'est pour cela que l'on parle parfois de classe LU plutôt que de classe LOCC. Une telle transformation LU agissant sur des états multiqubits appartient au groupe $SU(2)^{\otimes N} =$

2. Si l'état est séparable, alors la connaissance de l'état de chaque sous-système suffit à décrire l'état global.

3. LOCC est l'acronyme de Local Operation with Classical Communication

$SU(2) \otimes \dots \otimes SU(2)$. Ainsi, deux états $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ à N qubits sont LOCC-équivalents si il existe une transformation unitaire locale tel que

$$|\psi_1\rangle \underset{\text{LOCC}}{\simeq} |\psi_2\rangle \Leftrightarrow (U_1 \otimes \dots \otimes U_N)|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle \quad (1.20)$$

avec U_1, \dots, U_N des opérateurs unitaires locaux appartenant à $SU(2)$ agissant respectivement sur le qubit $1, 2, \dots, N$. Le problème de ces classes LOCC est que pour les systèmes de 4 qubits ou plus, il existe une infinité de classes différentes. Ainsi, surviennent deux questions : premièrement, comment faire pour identifier toutes ces classes ? Deuxièmement, est-il possible de regrouper ces classes en familles qui seraient, elles, en nombre fini ? Ce mémoire essaiera d'introduire une réponse (au moins partielle) à ces deux questions.

La classification SLOCC

Dans le même schéma que pour les classes LOCC, il faut pour comprendre ce qu'est une classe SLOCC comprendre d'abord ce qu'est une opération locale stochastique avec communication classique (SLOCC)⁴. Il s'agit également d'une procédure visant à transformer un état $|\psi_1\rangle$ en un autre $|\psi_2\rangle$ mais, cette fois-ci, non pas de façon certaine mais uniquement avec une probabilité non nulle. Une classe SLOCC contient donc tous les vecteurs qui peuvent se transformer l'un en l'autre avec une probabilité non nulle sous une opération SLOCC. Deux états appartenant à la même classe sont dits SLOCC-équivalents. On voit immédiatement que si deux états sont LOCC-équivalents alors, ils sont SLOCC-équivalents. Le contraire n'est pas forcément vrai. Il a également été montré [22] [23] que deux états $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sont SLOCC-équivalents si et seulement si il existe une transformation locale inversible (ILO) qui transforme l'un de ces deux états en l'autre. Ces transformations ILO appartiennent au groupe $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes N} = SL(2, \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes SL(2, \mathbb{C})$. Deux vecteurs kets $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ à N qubits sont SLOCC-équivalents si et seulement si il existe une transformation $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_N \in SL(2, \mathbb{C})^{\otimes N}$ tel que

$$|\psi_1\rangle \underset{\text{SLOCC}}{\simeq} |\psi_2\rangle \Leftrightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_N)|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle \quad (1.21)$$

avec les V_1, \dots, V_N qui sont des opérateurs inversibles locaux agissant respectivement sur le qubit $1, 2, \dots, N$. Comme pour les classes LOCC, les classes SLOCC sont aussi en nombre infini pour tout état comprenant 4 qubits ou plus. Les mêmes questions que pour les classes LOCC se posent.

1.4.2 Mesures d'intrication

Bien que les classes d'intrication permettent de regrouper les états suivant leurs propriétés d'intrication, elles ne permettent pas "d'ordonner" l'intrication, ni de pouvoir dire que tel état est plus intriqué que tel autre état. C'est dans ce but que l'on introduit les mesures d'intrication. Chaque mesure a ses propres propriétés, mais généralement il y a un ensemble de propriétés que l'on veut qu'une mesure d'intrication $E(\rho)$ (ρ est l'opérateur densité) respecte (voir [11] pour une discussion détaillée). Dans ce mémoire, nous n'utiliserons qu'une mesure : l'entropie d'intrication. Mais avant d'introduire cette mesure, il faut rappeler la notion d'opérateur densité et d'opérateur densité réduit.

Opérateur densité

4. SLOCC est l'acronyme de Stochastic Local Operations with Classical Communication

Il est fréquent que l'on ne sache pas exactement dans quel état se trouve un système physique, mais que l'on sache qu'il y a une probabilité p_1 qu'il se trouve dans l'état $|\psi_1\rangle$, une probabilité p_2 qu'il se trouve dans l'état $|\psi_2\rangle$, et ainsi de suite jusqu'à une probabilité p_n qu'il se trouve dans l'état $|\psi_n\rangle$; ($\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i > 0$). On dit alors que l'état se trouve dans un état mixte. Pour décrire ce genre de système, il est utile d'introduire l'opérateur densité [24]

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.22)$$

Il est toujours possible de trouver un ensemble de probabilités, de façon à ce que n soit inférieur ou égale à la dimension de l'espace de Hilbert. Il est à remarquer que si on connaît parfaitement l'état du système, c'est-à-dire si l'on sait qu'il se trouve avec une probabilité 1 dans l'état $|\psi\rangle$, alors l'opérateur densité est

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (1.23)$$

et on dit que le système est dans un état pur. L'opérateur densité joue exactement le même rôle que le vecteur $|\psi\rangle$, il décrit l'état du système physique. Il s'agit d'une description plus générale que celle en terme de fonction d'onde. Quand on représente l'opérateur densité dans une base, on obtient une matrice qui porte le nom de matrice densité. Par abus de langage, on parle parfois de matrice densité pour désigner l'opérateur densité.

Dans ce mémoire, nous travaillerons uniquement avec des états purs; mais, nous aurons, néanmoins, besoin du concept d'opérateur densité pour introduire la notion d'opérateur densité réduit. On dit qu'un état est maximalelement mélangé quand son opérateur densité est $\hat{\rho} = \frac{1}{N} \mathbb{1}$ ⁵.

Opérateur densité réduit

Lors de l'étude de systèmes constitués d'un grand nombre de particules, il n'est pas toujours nécessaire de travailler avec l'état décrivant l'entièreté du système. Dans beaucoup de situations, il est intéressant de travailler uniquement avec l'état d'un sous-système composé d'un nombre de qubits plus restreint. Ceci facilite souvent beaucoup les calculs. L'état d'un sous-système va être décrit par l'opérateur densité réduit.

Soit un système constitué de deux parties A et B . La partie A (respectivement la partie B) a comme espace de Hilbert \mathcal{H}_A (respectivement \mathcal{H}_B). Le système global a donc lui comme espace de Hilbert $\mathcal{H}_{A,B} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Soit l'opérateur densité du système global $\hat{\rho}$. A partir de celui-ci, on peut construire l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}_A$ du sous-système A en traçant sur le sous-système B

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{A,B}) \quad (1.24)$$

On appelle aussi parfois ces opérateurs densités réduits les matrices densités réduites. Le sous-système A peut alors être vu comme s'il était dans l'état $\hat{\rho}_A$, mais ce uniquement pour les opérations de mesures relatives au sous-système A . En effet, il ne faudrait pas croire que le système total se trouve dans l'état $\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$. Cette équation n'est vraie que si l'état est séparable sur la partie A et B . Dans ce mémoire, nous allons principalement calculer la matrice densité réduite à un qubit. C'est-à-dire, l'opérateur $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_N \dots \text{Tr}_2(\hat{\rho})$, où N est le nombre total de qubits du système. Ces opérateurs sont représentés par des matrices 2×2 . On dit que l'état du sous-système à un qubit est **maximalement mélangé** quand sa matrice densité réduite à un qubit est

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

5. Par abus de notations, nous noterons parfois simplement ρ plutôt que $\hat{\rho}$ pour l'opérateur de densité.

On dit aussi, dans ce cas, que l'état possède une matrice densité réduite à un qubit maximale-ment mélangée.

Pour un état à N qubits, il y existe donc N matrices densités réduites à un qubit. Comme un état symétrique est invariant sous permutation de ses particules, il est évident que toutes ses matrices densités réduites à un qubit sont égales.

Entropie d'intrication

Les rappels sur l'opérateur densité réduit étant effectués, il reste une dernière notion à rappeler avant d'introduire l'entropie d'intrication : l'entropie de von Neumann. L'entropie de von Neumann est une généralisation aux états quantiques de l'entropie de Gibbs des systèmes classiques [25]. Soit un système décrit par la matrice densité ρ , agissant sur un espace de Hilbert de dimension N . On définit l'entropie de von Neumann de ρ comme le nombre réel

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) \quad (1.26)$$

Si λ_i ($i = 1, \dots, N$) sont les valeurs propres de ρ , alors on peut réexprimer l'entropie de von Neumann, en utilisant le théorème de décomposition spectrale, sous la forme

$$S(\rho) = -\sum_i (\lambda_i \ln(\lambda_i)) \quad (1.27)$$

où par convention, on choisit que $0 \ln(0) = 0$. L'entropie de von Neumann jouit de propriétés qui la rendent intéressante pour créer une mesure d'intrication. Ces propriétés sont

- Pour tout état pur $\rho = \langle \psi | \psi \rangle$ et uniquement pour ceux-ci, l'entropie de von Neumann est nulle $S(\rho) = 0$.
- L'entropie de von Neumann est maximale pour les états maximale-ment mélangé, au sens des états dont la matrice densité vaut $\rho = \frac{1}{N} \mathbb{1}$. Dans ce cas, l'entropie de von Neumann vaut $S(\rho) = \ln N$
- Soit deux sous-systèmes A et B caractérisés respectivement par ρ_A et ρ_B . On a que $S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$.
- L'entropie de von Neumann est invariante sous transformation unitaire locale.

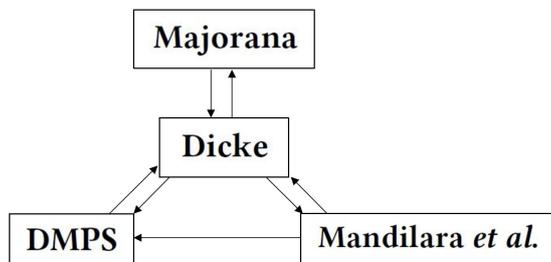
On peut ainsi définir la mesure d'intrication pour les états purs : **l'entropie d'intrication**. Soit deux sous-systèmes A et B . Le système global est décrit par la matrice densité $\rho_{A,B} = \langle \psi_{A,B} | \psi_{A,B} \rangle$ (il s'agit bien d'un état pur). L'entropie d'intrication E est définie comme étant l'entropie de von Neumann de l'état réduit [11]

$$E(\rho_{A,B}) = S(\text{Tr}_B(\rho_{A,B})) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = S(\text{Tr}_A(\rho_{A,B})) \quad (1.28)$$

L'entropie d'intrication d'un état dépend donc de la partition qui est faite sur le système physique. Si le système est constitué de plusieurs sous-systèmes, alors, il existe une valeur de l'entropie de von Neumann pour chaque bi-partition possible. Dans ce mémoire, nous calculerons l'entropie d'intrication pour la matrice densité réduite à un qubit, c'est-à-dire $E(\rho_1)$. On voit qu'une telle entropie d'intrication est maximale si l'état possède une matrice densité réduite à un qubit maximale-ment mélangée. Dans ce mémoire, quand on parle **d'états maximale-ment intriqués**, on sous-entend des états avec une entropie d'intrication maximale pour la matrice densité réduite à un qubit.

Chapitre 2

Diverses représentations d'états multiqubits symétriques



Un des principaux objectifs de ce mémoire est d'étudier diverses représentations des états symétriques de systèmes multiqubits, plus particulièrement les représentations DMPS et de Mandilara *et al.*. Avant d'introduire ces deux représentations, il est nécessaire de présenter la représentation de Dicke et de Majorana, qui sont toutes deux les représentations "standards" pour un état multiqubits symétrique. Ce chapitre va introduire toutes ces différentes représentations. Mais, avant de les définir, il faut rappeler ce qu'est une représentation. On entend par représentation d'un état multiqubit symétrique, une base, pas forcément orthogonale, de \mathcal{H}_S^1 ou simplement un ensemble de vecteurs $\{|\Phi_i\rangle, i = 1, \dots, M\}$ en termes desquels un vecteur ket $|\psi_S\rangle$ peut s'écrire sous la forme

$$|\psi_S\rangle = \sum_{i=0}^M c_i |\Phi_i\rangle \quad (2.1)$$

avec $c_i = \langle \Phi_i | \psi_S \rangle \in \mathbb{C}$, et M un entier compris entre 0 et le nombre de qubits N . Les vecteurs $|\Phi_i\rangle$ définissent les vecteurs de la représentation. Dans certaines représentations, comme la représenta-

1. On rappelle ici, les notions de base, base orthonormée et base non-orthogonale. Soit un espace de Hilbert \mathcal{H} d'un système à plusieurs particules, de dimension finie D . Un ensemble de vecteurs $\{|\Phi_i\rangle, i = 1, \dots, D\}$ forme une base de \mathcal{H} si et seulement si cet ensemble est libre et générateur de \mathcal{H} . Un ensemble de vecteurs $\{|\Phi_i\rangle, i = 1, \dots, D\}$ est dit libre si aucun de ces vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Un ensemble de vecteurs est générateur de \mathcal{H} si tout vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs, c'est-à-dire comme $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^D d_i |\Phi_i\rangle$ avec $d_i \in \mathbb{C}$. Le nombre de vecteurs D qui constituent la base $\{|\Phi_i\rangle, i = 1, \dots, D\}$ est ce que l'on appelle la dimension de l'espace \mathcal{H} . On dit qu'une base est orthonormée si les vecteurs $|\Phi_i\rangle$ sont tels que $\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \delta_{i,j} \forall i, j = 1, \dots, D$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Si cette condition n'est pas remplie mais que l'on a toujours $\langle \Phi_i | \Phi_i \rangle = 1$, alors, on dit que la base est normée mais non-orthogonale.

tion de Dicke ou de DMPS, on fixe les kets $|\Phi_i\rangle$ et ils sont donc indépendants du vecteur $|\psi_S\rangle$. Dans d'autres représentations, comme celle de Majorana et celle de Mandilara et *et al.*, les vecteurs $|\Phi_i\rangle$ dépendent de $|\psi_S\rangle$. Certaines représentations s'interprètent également géométriquement. C'est, par exemple, le cas de la représentation de Majorana, dont son plus grand intérêt n'est pas la forme (2.1) mais bien sa représentation géométrique.

On présente, en premier lieu, la représentation de Dicke qui est la représentation la plus naturelle et, qui permet de construire les autres représentations. Ensuite, la représentation de Majorana sera introduite. Celle-ci est particulièrement utile pour se donner une visualisation géométrique d'un état pur multiqubits. Enfin on définit les deux dernières représentations, la représentation DMPS et de Mandilara *et al.*, ainsi que leur utilité pour les classes d'intrication.

2.1 La représentation de Dicke

Cette représentation a été introduite par R.H. Dicke en 1954 [7]. Comme expliqué au chapitre précédent, une base naturelle d'un système à plusieurs qubits est la base computationnelle (l'équation (1.11) pour des systèmes à deux qubits). Si, à la place de travailler dans tout l'espace de Hilbert, on se restreint à travailler dans le sous-espace symétrique, alors, à partir de la base computationnelle, on peut construire la base de Dicke qui est une base du sous-espace symétrique. Rappelons que l'espace $\mathcal{H}_q^{\otimes N} \equiv \mathcal{H}_q \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_q$ est de dimension 2^N où N est le nombre de qubits, alors que le sous-espace symétrique est de dimension $N + 1$.

La base computationnelle de l'espace $\mathcal{H}_q^{\otimes N}$ est donnée par

$$\left\{ |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle, i_k = 0, 1, k = 1, \dots, N \right\} \quad (2.2)$$

Ces vecteurs ne sont en général pas symétriques, c'est-à-dire qu'ils ne restent pas inchangés sous l'action d'un opérateur de transposition $\hat{\Pi}_{i,j}$. Un exemple simple à deux qubits suffit pour s'en convaincre

$$\hat{\Pi}_{1,2}|0, 1\rangle = |1, 0\rangle \neq |0, 1\rangle \quad (2.3)$$

On construit alors $N + 1$ combinaisons linéaires des vecteurs $|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$ qui sont symétriques

$$|D_N^{(k)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_N^k}} \sum_{i_1, \dots, i_N=0,1} \kappa_{i_1, \dots, i_N}^k |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle \quad \forall k = 0, \dots, N \quad (2.4)$$

où $\kappa_{i_1, \dots, i_N}^k$ vaut 1 s'il y a exactement k vecteurs kets $|1\rangle$ et zéro sinon. De tels vecteurs sont appelés vecteurs de Dicke, et ils constituent une base du sous-espace symétrique : la base de Dicke. On peut réexprimer ces vecteurs comme suit

$$|D_N^{(k)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!k!(N-k)!}} \sum_{\sigma} \underbrace{|1_{\sigma(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |1_{\sigma(k)}\rangle}_k \otimes \underbrace{|0_{\sigma(k+1)}\rangle \otimes \dots \otimes |0_{\sigma(N)}\rangle}_{N-k} \quad \forall k = 0, \dots, N \quad (2.5)$$

où la somme sur σ porte sur les $N!$ permutations des qubits. Cette écriture permet de donner une signification à l'indice k . On l'appelle *le nombre d'excitation* car il représente le nombre de qubits qui sont dans l'état $|1\rangle$. Ainsi, tout vecteur appartenant à \mathcal{H}_S peut se décomposer dans la base de Dicke selon

$$|\psi_S\rangle = \sum_{k=0}^N d_k |D_N^{(k)}\rangle \quad (2.6)$$

où les coefficients $d_k = \langle D_N^{(k)} | \psi_S \rangle \in \mathbb{C}$ sont appelés coefficients de Dicke. Cette équation est **la représentation de Dicke** de l'état $|\psi_S\rangle$. La représentation de Dicke est la représentation la plus couramment utilisée pour exprimer les états multiqubits symétriques. Cela vient du fait que cette représentation découle directement de la base computationnelle de tout l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_q^{\otimes N}$. Ainsi, dans ce rapport, nous partirons toujours de la base de Dicke pour construire les autres représentations. C'est d'ailleurs comme ça que sont, en général, construites de nouvelles représentations.

2.1.1 Correspondance entre les vecteurs de Dicke et les états de spin

Bien qu'il ne s'agit pas réellement d'une autre représentation, on mentionne quand même qu'il existe une correspondance formelle entre les états de Dicke et les états de spin [11]. Ainsi, un état multiqubit symétrique peut s'interpréter comme un état de spin.

Pour comprendre cette correspondance, quelques rappels sur les états de spin sont nécessaires. Soit \mathcal{H}_j l'espace de Hilbert d'un spin de nombre quantique j (entier ou demi-entier). On définit les opérateurs de spin $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ qui répondent aux relations de commutation : $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z$, $[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y$, $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x$. On définit également l'opérateur $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$. $\hat{\mathbf{J}}^2$ et \hat{J}_z forment un E.C.O.C. dans \mathcal{H}_j et donc une base de \mathcal{H}_j est donnée par l'ensemble des vecteurs propres communs $|j, m\rangle$ ($-j \leq m \leq j$) de $\hat{\mathbf{J}}^2$ et \hat{J}_z :

$$\hat{\mathbf{J}}^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \quad (2.7)$$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad (2.8)$$

Ainsi, on peut décomposer tout état de spin $|\psi_j\rangle$ appartenant à \mathcal{H}_j comme

$$|\psi_j\rangle = \sum_{m=-j}^j c_m |j, m\rangle \quad (2.9)$$

Par identification formelle entre l'état multiqubits symétrique (2.6) et l'état de spin (2.9) il est possible d'établir une correspondance une à une entre les vecteurs $|j, m\rangle$ et les vecteurs de Dicke $|D_N^{(k)}\rangle$. Pour effectuer cette correspondance, on peut choisir $k = j - m$ et $N = 2j$. Ainsi, la correspondance est

$$\begin{aligned} |D_N^{(k)}\rangle &\longleftrightarrow \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - k \right\rangle \\ |j, m\rangle &\longleftrightarrow |D_{2j}^{(j-m)}\rangle \\ d_k &\longleftrightarrow c_{j-k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Travailler dans la base de Dicke de l'espace \mathcal{H}_S , ou dans la base $\{|j, m\rangle\}$ de l'espace \mathcal{H}_j revient strictement au même, puisque l'on peut passer de l'une à l'autre par la correspondance (2.10). Cette correspondance n'est pas, à proprement dit, une nouvelle représentation, mais elle permet une nouvelle interprétation en termes de spin.

2.2 La représentation de Majorana

La représentation de Majorana a été introduite pour la première fois par Ettore Majorana en 1932 [8]. Depuis cette représentation est fréquemment utilisée. Elle présente comme principal intérêt qu'elle donne lieu à une interprétation géométrique. En effet, grâce à cette représentation, on peut visualiser tout état symétrique constitué de N qubits, comme un ensemble de N points sur la sphère de Bloch. En plus, la représentation de Majorana permet de caractériser un état symétrique d'un système multiqubits uniquement grâce à des paires d'angles.

On définit **la représentation de Majorana** comme suit. Tout état multiqubits peut s'écrire sous la forme [10]

$$|\psi_S\rangle = \mathcal{N} \sum_{\sigma} |\phi_{\sigma(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_{\sigma(N)}\rangle \quad (2.11)$$

où la somme sur σ porte sur toutes les permutations, \mathcal{N} est un facteur de normalisation et les vecteurs $|\phi_i\rangle$ sont des états à un qubit

$$|\phi_i\rangle = \alpha_i|0\rangle + \beta_i|1\rangle \quad (2.12)$$

avec $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, et tels que $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$. Comme tout vecteur est défini à une phase globale près, on choisit les α, β tels que $\alpha_i = \cos \theta_i$ et $\beta_i = \sin \theta_i e^{i\varphi_i}$, avec $\theta_i \in [0, \pi]$ et $\varphi_i \in [0, 2\pi[$. Les vecteurs $|\phi_i\rangle$ s'écrivent alors

$$|\phi_i\rangle = \cos(\theta_i)|0\rangle + \sin(\theta_i)e^{i\varphi_i}|1\rangle \quad (2.13)$$

Les vecteurs $|\phi_i\rangle$ ne sont en général pas orthogonaux entre eux. Cette écriture des $|\phi_i\rangle$ va être la base de la représentation géométrique de Majorana. Contrairement à la représentation de Dicke, on voit que dans la représentation de Majorana, les vecteurs $|\phi_i\rangle$ dépendent du vecteur $|\psi_S\rangle$.

On peut maintenant introduire la représentation géométrique de Majorana. On va représenter l'état $|\psi_S\rangle$ comme N points sur une sphère. Chacun de ces N points provient de la représentation de Bloch d'un vecteur $|\phi_i\rangle$. Ainsi, la représentation de Majorana est une généralisation de la sphère de Bloch, pour un état multiqubits symétrique. La Figure 2.1 donne la représentation géométrique de Majorana de l'état symétrique

$$|\psi_S\rangle = -i\sqrt{\frac{3}{10}}|D_4^{(0)}\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\left(\frac{1}{2} + i\right)|D_4^{(1)}\rangle - \left(\frac{1}{5} - \frac{i}{2\sqrt{5}}\right)|D_4^{(2)}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}|D_4^{(3)}\rangle \quad (2.14)$$

Cette représentation géométrique sur la sphère de Bloch est un des atouts de la représentation de Majorana qui permet de décrire un état en termes de paires d'angles

$$|\psi_S\rangle \leftrightarrow \{(\theta_i, \varphi_i), i = 1, \dots, N\} \quad (2.15)$$

Il faut également mentionner que les états $|\phi_i\rangle$ ne représentent, en général², rien de physique, dans le sens où ces états ne sont pas les états des sous-systèmes à 1 qubit qui constituent l'état $|\psi_S\rangle$. Les états $|\phi_i\rangle$ ont un sens, uniquement, dans l'équation (2.11); hors de cette représentation, ils ne représentent, en général, rien de physique.

2. Dans le cas d'états séparables, par exemple, on peut donner une interprétation physique à ces états.

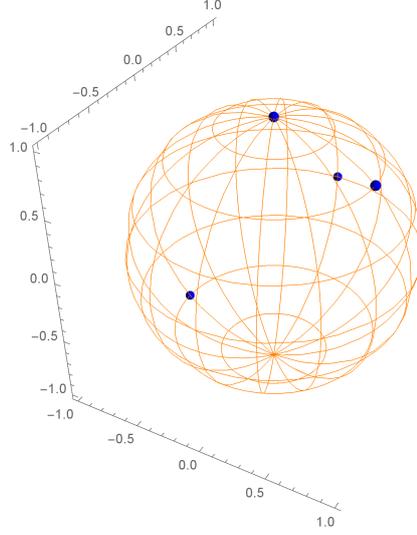


FIGURE 2.1 – Représentation de Majorana de l'état $|\psi_s\rangle$, les angles de Majorana (θ_i, φ_i) de cet état sont $\{(0, 0), (\frac{3\pi}{4}, \pi), (\frac{\pi}{4}, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$.

2.2.1 Passage de la représentation de Dicke à Majorana

On montre ici comment on peut passer de la représentation de Dicke à la représentation de Majorana.

Démonstration

On commence par prendre un état multiqubit symétrique dans la représentation de Dicke (2.6) et on construit alors, à partir des coefficients d_k ce que nous appellerons *le polynôme de Majorana* [11]

$$P(z) = \sum_{k=n_S}^{N-n_N} (-1)^k \sqrt{C_N^k} d_k z^k \quad (2.16)$$

avec n_S le nombre de coefficients initiaux nuls, c'est-à-dire $d_i = 0$ pour $i = 0, \dots, n_S$, et n_N le nombre de coefficients terminaux nuls, c'est-à-dire $d_i = 0$ pour $i = N - n_N + 1, \dots, N$ et $d_{N-n_N} \neq 0$. Le polynôme de Majorana peut changer en fonction des conventions choisies pour les vecteurs $|\phi_i\rangle$, plus précisément en fonction des α_i et β_i de (2.12). Si on les choisit comme ceux de l'équation (2.13), alors le choix du polynôme (2.16) est cohérent. On peut réécrire ce polynôme comme

$$P(z) = (-1)^{N-n_N} \sqrt{C_N^{n_N}} d_{N-n_N} z^{n_S} \prod_{k=1}^{N-n_N-n_S} (z - z_k) \quad (2.17)$$

où les z_k sont les $N - n_N - n_S$ zéros non nuls du polynôme, auquel il faut ajouter les n_S zéros nuls. Le polynôme de Majorana a donc $N - n_S$ racines. Il est important que la représentation de Majorana ne perde pas l'information du nombre de qubits N de l'état $|\psi_S\rangle$. Or, cette information est contenue dans le degré du polynôme si $n_N = 0$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand $n_N \neq 0$, on ajoute aux racines du polynôme n_N infinis complexes ∞ . L'infini complexe ∞ est défini comme un

nombre complexe de module infini et de phase non définie. Ainsi, $\tilde{\infty}$ est unique. La liste des racines du polynôme de Majorana (2.16) est

$$Z_p = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{n_S}, z_{n_S+1}, \dots, z_{N-n_N}, \underbrace{\tilde{\infty}, \dots, \tilde{\infty}}_{n_N}\} \quad (2.18)$$

Les infinis complexes $\tilde{\infty}$ ont un sens car ils vont représenter les points caractérisés par l'angle $\theta_i = 0$, autrement dit, les points situés au pôle nord de la sphère de Bloch. Le pôle nord de la sphère de Bloch représente bien "l'infini". Les coefficients α_i et β_i de l'équation (2.12) vérifient

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = z_i \quad \text{si } z_i \neq \tilde{\infty} \quad (2.19)$$

$$\alpha_i = 1; \beta_i = 1 \quad \text{si } z_i = \tilde{\infty} \quad (2.20)$$

Ainsi, on voit qu'à partir des racines du polynôme de Majorana construites avec les coefficients de Dicke d_k , on obtient les coefficients des états $|\phi_i\rangle$. Notons que α_i et β_i doivent également respecter l'équation $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$. Évidemment une fois les coefficients α_i et β_i obtenus, on obtient également directement les angles associés θ_i et φ_i .

2.2.2 Passage de la représentation de Majorana à celle de Dicke

Il est également possible, si l'on a initialement la représentation de Majorana d'un état $|\psi_S\rangle$, de reconstruire la représentation de Dicke de cet état. Pour cela, on utilise les équations (2.19) et les formules de Viètes.

Démonstration

Pour rappel, les formules de Viètes font le lien entre les coefficients d'un polynôme et ses racines. Soit un polynôme de degré n

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2.21)$$

avec les coefficients $a_i \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. On pose $a_n = 1$ car on peut toujours revenir à cette situation en divisant tout le polynôme par a_n , ce qui ne change rien à ses racines. On nomme les n racines de ce polynôme x_i avec $i = 1, \dots, n$. La formule de Viètes permet d'écrire les coefficients du polynôme en fonction des racines x_i

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (2.22)$$

En remplaçant les racines x_i par $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ pour le polynôme de Majorana (2.16), on obtient les coefficients d_k en fonction de α_i et β_i , soit

$$d_k = \sqrt{C_N^k} \sum_{\sigma} \beta_{\sigma(1)} \dots \beta_{\sigma(k)} \alpha_{\sigma(k+1)} \dots \alpha_{\sigma(N)} \quad (2.23)$$

où la somme sur σ porte sur toutes les permutations des indices.

2.2.3 Projection stéréographique et transformation de Möbius

Dans le cadre de la représentation de Majorana, il est intéressant d'introduire le concept de projection stéréographique et de transformation de Möbius. A l'aide de ces deux notions, il va être possible d'interpréter les transformations géométriques de la représentation de Majorana comme des transformations de Möbius.

Projection stéréographique

La projection stéréographique établit un isomorphisme entre les points de la sphère de Bloch³ et les points du plan complexe étendu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. La Figure 2.2 illustre un exemple de projection stéréographique. La projection stéréographique inverse projette les points du plan complexe étendu sur la sphère. On considère le plan complexe et une sphère de rayon unité dont le pôle sud coïncide avec l'origine du plan complexe. La projection d'un point z_1 du plan complexe sur la sphère se construit comme suit ; on trace une droite passant par le point z_1 et le pôle nord de la sphère. L'intersection entre la sphère et cette droite sera la projection stéréographique de z_1 . Plus rigoureusement, la projection stéréographique inverse est l'isomorphisme $v : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \frac{1}{2|z|^2+2} (2\text{Re}(z), 2\text{Im}(z), |z|^2) & z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 2) & z = \infty \end{cases} \quad (2.24)$$

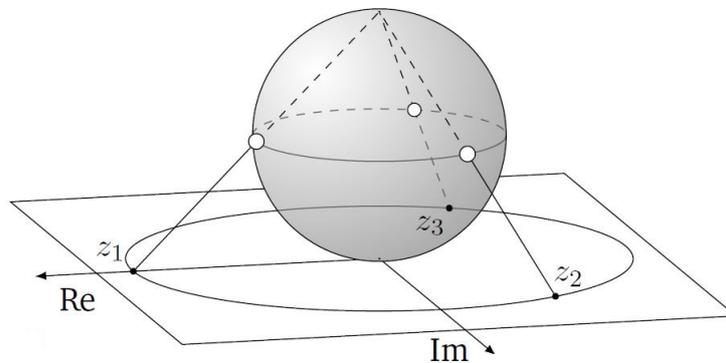


FIGURE 2.2 – Illustration d'une projection stéréographique : dans cette projection le pôle sud de la sphère est en contact avec l'origine du plan complexe. Image tirée de [26].

En réalité, il existe plusieurs projections stéréographiques qui dépendent d'où et de comment on situe la sphère de Bloch par rapport au plan complexe. La sphère peut, par exemple, intersecter le plan comme sur la Figure 2.3. Elle peut également n'avoir aucun contact avec le plan, et ne pas être centrée en de l'origine du plan complexe. De plus, on peut choisir un autre point que le pôle nord pour tracer la droite qui permet de construire la projection. Nous choisissons de travailler avec la sphère de Bloch, comme illustré sur la Figure 2.2. La représentation de Majorana est une projection stéréographique. En effet , on construit les points de Majorana sur la sphère de Bloch à partir des α_i, β_i de (2.12), qui se situent dans le plan complexe.

3. Les mathématiciens parlent plutôt de sphère de Riemann nommée \mathbb{S}^2 .

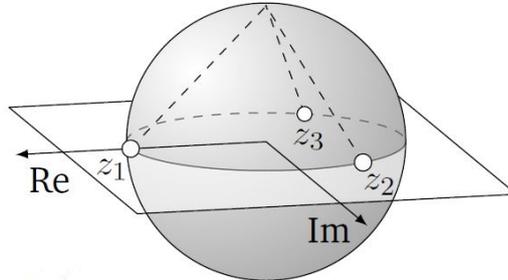


FIGURE 2.3 – Illustration d’une projection stéréographique : dans cette projection la sphère est centrée sur l’origine du plan complexe. Image tirée de [26].

Transformation de Möbius

Introduisons maintenant la notion de transformation de Möbius. De telles transformations sont des fonctions bijectives holomorphiques qui vont de $\overline{\mathbb{C}}$ à lui-même. Plus précisément, de telles transformations sont des fonctions $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de la forme [26]

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.25)$$

où les coefficients a, b, c et $d \in \mathbb{C}$ sont tels que $ad - bc \neq 0$, ce qui assure que f est inversible. On a aussi que le groupe de transformation de Möbius est isomorphe à $SL(2, \mathbb{C})/\pm \mathbb{1}$ [26].

Ces transformations s’interprètent en fonction de projections stéréographiques. En effet, la projection stéréographique stipule que tout point du plan complexe peut être vu comme un point sur la sphère de Bloch. Ainsi, appliquer une transformation de Möbius sur un point du plan complexe, revient à effectuer une opération géométrique de ce point sur la sphère de Bloch.

Prenons un exemple simple, effectuons sur des points du plan complexe la transformation de Möbius suivante : $z \rightarrow \frac{z}{2}$. La Figure 2.4 montre qu’une tel transformation va avoir pour effet, sur la sphère de Bloch, de "translater" les points dans un plan parallèle mais situé plus proche du pôle sud. Plus généralement, toutes transformations de Möbius peut être décomposées en opérations élémentaires, qui s’interprètent comme des opérations géométriques de base sur la sphère de Bloch. Si on a un ensemble de points sur la sphère de Riemann, les opérations élémentaires des transformations de Möbius vont associer des transformations géométriques de ces points sur la sphère :

- Rotation et translation selon l’axe O_z : $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
 - Translation selon l’axe O_z ⁴ : $z \mapsto e^{i\varphi}z$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$
Les points de Majorana, vont effectuer une rotation d’axe O_z sur la sphère de Bloch.
 - Changement de plan : $z \mapsto rz$ avec $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Les points de Majorana vont subir une translation d’axe O_z sur la sphère. Illustré à la Figure 2.4. Si $r > 0$ alors, la translation est vers le pôle nord ; si $r < 0$ alors, la translation est vers le pôle sud.

4. Pour la définition des axes, voir la Figure 1.1

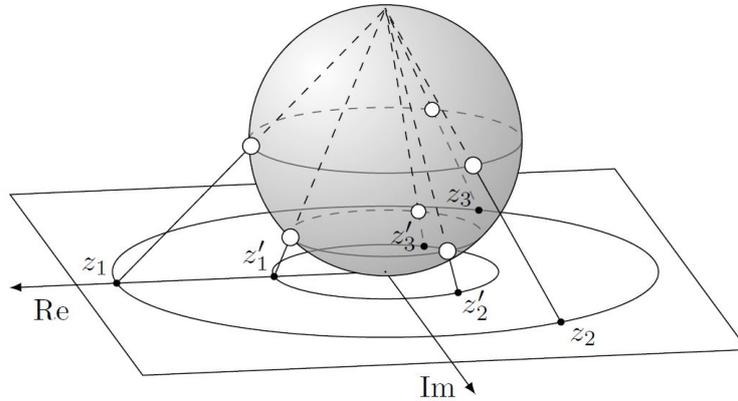


FIGURE 2.4 – Cette image illustre l’application de la transformation de Möbius $z \rightarrow \frac{z}{2}$ sur un ensemble de points dans le plan complexe et sur la sphère de Bloch. Cette image provient de [26].

- Translation : $z \mapsto z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$
Les points dans le plan complexe vont subir une translation, ce qui va engendrer une déformation et une rotation des points de Majorana sur la sphère de Bloch.
- Inversion : $z \mapsto \frac{1}{z}$
Les points de Majorana vont subir une symétrie miroir dont le plan de symétrie est le plan de l’équateur.

Un théorème important sur les transformations de Möbius :

Théorème : Deux états à N qubits sont SLOCC équivalents, si, et seulement si, il existe une transformation de Möbius entre les racines de leur polynôme de Majorana [26].

On comprend aisément ce théorème puisqu’il a déjà été mentionné plus haut qu’il existe une transformation $SL(2, \mathbb{C})$ entre deux ensembles de points si on peut également trouver une transformation de Möbius qui relie ces deux ensembles, car il y a un isomorphisme entre le groupe de Möbius et $SL(2, \mathbb{C})/\pm\mathbb{1}$. Or, on sait que deux états appartiennent à la même classe SLOCC si, et seulement si, il existe une transformation $SL(2, \mathbb{C})$ entre ces deux états.

2.3 La représentation DMPS

La représentation Diagonal Matrix Product States (DMPS) sont une reformulation d’un cas particulier de la représentations Matrix Product States (MPS), que nous n’étudierons pas ici [27, 28, 29]. M. Sanz *et al.* utilise cette représentation DMPS pour introduire le concept d’optimal bond dimension. Grâce à celui-ci, ils vont, dans leur article publié en 2016 [5], définir des familles d’intrication. Le principal intérêt de ces familles est qu’elles sont en nombre fini peu importe le nombre de qubits du système. Chaque famille regroupe plusieurs classes d’intrication.

La représentation DMPS permet de décomposer un état symétrique quelconque $|\psi_S\rangle$ en une somme d’états séparables. Pour ce faire, on se choisit $N + 1$ état à un qubit $|\phi_m\rangle$

$$|\phi_m\rangle = \alpha_m|0\rangle + \beta_m|1\rangle \quad (2.26)$$

qui sont deux à deux linéairement indépendants. Les états séparables à N qubits $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N} \equiv |\phi_m\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ constituent une base (pas forcément orthogonale) de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_S . On peut alors décomposer tout vecteur $|\psi_S\rangle$ comme suit [5]

$$|\psi_S\rangle = \sum_{m=0}^N c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (2.27)$$

avec $c_m \in \mathbb{C}$. L'équation (2.27) est la forme la plus générale d'**une représentation DMPS**. Cette représentation est un peu particulière dans le sens où on a la liberté du choix des vecteurs $|\phi_m\rangle$. La forme (2.27) **n'est donc pas unique**. Pour un même vecteur $|\psi_S\rangle$, on peut construire une infinité de représentations DMPS différentes (2.27) en choisissant d'autres vecteurs $|\phi_m\rangle$. Néanmoins, comme les vecteurs $|\phi_m\rangle$ forment une base de \mathcal{H}_S , si l'on se fixe ces derniers, un vecteur $|\psi_S\rangle$ s'écrit de façon unique comme (2.27).

On peut choisir n'importe quels ensembles $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ (tant qu'ils sont deux à deux linéairement indépendants) et décomposer n'importe quel vecteur symétrique dans la base $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$. La preuve présentée ici, a, initialement, été exposée dans le complément d'information de [5].

Démonstration

Soit le sous-espace symétrique pour un système à N qubits. Il faut montrer que $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ forme une base de cet espace si et seulement si les $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ sont deux par deux linéairement indépendants.

On commence par se donner un ensemble $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ appartenant à \mathcal{H}_q . On peut écrire ces $|\phi_m\rangle$ sous la forme (2.26). On voit immédiatement que, si la thèse est vraie, au maximum un β_m peut être nul. En effet, s'il y en avait plus, vu la liberté de la phase globale des états, cela signifierait qu'au moins deux $|\phi_m\rangle$ auraient leurs coefficients égaux à $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, et donc que ces deux vecteurs ne seraient pas linéairement indépendants.

a) Dans un premier temps, supposons qu'aucun β ne soit nul. On peut écrire tous les vecteurs $|\phi_m\rangle^{\otimes N}$ comme suit [11] :

$$|\phi_m\rangle^{\otimes N} = (\alpha_m|0\rangle + \beta_m|1\rangle)^{\otimes N} = \sum_{n=0}^N \sqrt{C_N^n} \beta_m^n \alpha_m^{N-n} |D_N^{(n)}\rangle \quad (2.28)$$

où les vecteurs $\{|D_N^{(n)}\rangle\}$ sont les vecteurs de la base de Dicke.

Les $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\sum_{m=0}^N \lambda_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} = 0$ implique $\lambda_m = 0 \forall m = 0, \dots, N$. Ainsi, en utilisant l'égalité (2.28), on peut écrire

$$\sum_{m=0}^N \lambda_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} = \sum_{n=0}^N \gamma_n |D_N^{(n)}\rangle \quad (2.29)$$

avec la relation suivante entre les λ_j et les γ_j

$$\gamma_n = \sqrt{C_N^n} \left(\sum_{m=0}^N \beta_m^n \alpha_m^{N-n} \lambda_m \right) \quad (2.30)$$

On peut représenter la relation entre ces coefficients sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = SVB \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où $S = \text{diag}(1, \sqrt{C_N^1}, \sqrt{C_N^2}, \dots, 1)$, $B = \text{diag}(\beta_0^N, \beta_1^N, \dots, \beta_N^N)$ et V la matrice de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^N & \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^N & \dots & \left(\frac{\alpha_N}{\beta_N}\right)^N \\ \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^{N-1} & \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{N-1} & \dots & \left(\frac{\alpha_N}{\beta_N}\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Si $\sum_{n=0}^N \gamma_n |D_N^{(n)}\rangle = 0$, alors, vu que les $|D_N^{(n)}\rangle$ sont linéairement indépendants, ça signifie que tous les γ_n sont nuls. Ainsi, si les γ_n sont nuls et que V est inversible, alors on peut réécrire (2.31) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (SVB)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

ce qui implique bien que tous les λ_m sont nuls, et donc que $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ sont linéairement indépendants. La condition de cette indépendance linéaire est donc que V soit inversible. Comme V est une matrice de Vandermonde, on peut écrire son déterminant comme suit

$$\det(V) = \prod_{1 \leq k < l \leq N+1} \left(\frac{\alpha_l}{\beta_l} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \quad (2.34)$$

Ce déterminant est bien différent de zéro, et donc V est inversible, si et seulement si les $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ sont deux à deux linéairement indépendants. Ainsi, on a bien montré que $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ sont linéairement indépendants (et générateurs, puisque N vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension N sont générateurs), si et seulement si $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ sont deux à deux linéairement indépendants. La thèse de départ a bien été démontrée dans le cas où aucun β_m n'est nul.

b) Supposons qu'un des coefficients β soit nul. Comme rappelé plus haut, au maximum un seul coefficient peut être nul. Choisissons, par exemple, $\beta_0 = 0$ et donc $\alpha_0 = 1$, sans perte de généralité puisque l'état est symétrique. En effectuant les mêmes étapes que précédemment, on peut écrire une équation similaire à (2.31)

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = S\tilde{V}\tilde{B} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

avec $\tilde{B} = \text{diag}(1, \beta_1^N, \dots, \beta_{N+1}^N)$ et

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 & (\frac{\alpha_1}{\beta_1})^N & \dots & (\frac{\alpha_N}{\beta_N})^N \\ 0 & (\frac{\alpha_1}{\beta_1})^{N-1} & \dots & (\frac{\alpha_N}{\beta_N})^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Par un raisonnement en tout point identique au cas précédent, on peut dire que l'indépendance linéaire des $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ est vérifiée uniquement si la matrice \tilde{V} est inversible, et donc est de déterminant non nul. Ce dernier s'exprime comme

$$\det(\tilde{V}) = \det \begin{pmatrix} (\frac{\alpha_1}{\beta_1})^N & \dots & (\frac{\alpha_N}{\beta_N})^N \\ (\frac{\alpha_1}{\beta_1})^{N-1} & \dots & (\frac{\alpha_N}{\beta_N})^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{2 \leq k < l \leq N+1} \left(\frac{\alpha_l}{\beta_l} - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \quad (2.37)$$

On voit que le déterminant ne fait intervenir que $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 1, \dots, N\}$ au lieu de $\{|\phi_i m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$. Il est non nul si $\{|\phi_i m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ sont linéairement indépendants deux à deux. Ainsi, nous avons bien prouvé que si l'on choisit $\{|\phi_m\rangle, m, \dots, N\}$ linéairement indépendants deux à deux alors $\{|\phi_m\rangle^{\otimes N}, m = 0, \dots, N\}$ constituent un ensemble linéairement indépendant et générateur de \mathcal{H}_S .

2.3.1 Lien avec les *Matrix Product States*

Initialement, le nom *Diagonal Matrix Product States* (DMPS) n'est pas celui de la représentation (2.27), mais bien d'une représentation qui lui est équivalente :

$$|\psi_S\rangle = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N=1}^2 \text{Tr}[A_{\mu_1} \dots A_{\mu_N}] |\mu_1 \dots \mu_N\rangle \quad (2.38)$$

où $A_{\mu_i}, (\mu_i = 0, 1)$ sont deux matrices diagonales⁵ et $|\mu_i\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\} \forall i = 1, \dots, N$. Tout état multiqubit symétrique peut s'écrire sous la forme (2.38), dite DMPS. En fait, l'équation (2.38) est un cas particulier pour les états symétriques de la forme *Matrix Product States* (MPS) [27, 28, 29]. Les représentations (2.27) et (2.38) sont, en fait, équivalentes. C'est pourquoi on nomme également la représentation (2.27) représentation DMPS. Montrons à présent cette équivalence.

Soit un système multiqubit décrit par un vecteur d'état symétrique $|\psi_S\rangle$ appartenant à un espace de Hilbert \mathcal{H}_S de dimension $N + 1$, si N est le nombre de qubits. Si $|\psi_S\rangle$ s'écrit comme

$$|\psi_S\rangle = \sum_{m=1}^D c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (2.39)$$

5. Il est à noter que ces matrices $\{A_{\mu_i}\}$ ne sont pas uniques pour un état $|\psi_S\rangle$ donné. On peut trouver d'autres ensembles de matrices $\{B_{\mu_i}\}$ qui permettent d'écrire cet état sous la forme (2.38). Les matrices A_i et B_i doivent alors être telles que $B_i = X A_i X^{-1}$ avec X une matrice inversible.

avec $c_m \in \mathbb{C}$, $|\phi_m\rangle = \alpha_m|0\rangle + \beta_m|1\rangle$ et $D \leq N$, c'est-à-dire sous forme (2.27), alors il est toujours possible d'écrire cet état sous la forme (2.38). On introduit d'abord les opérateurs de Kraus A_μ , ($\mu = 0, 1$) qui, nous allons le montrer, peuvent être identifiées aux matrices A_{μ_i} de (2.38)

$$A_\mu = \sum_{m=1}^D c_m^{1/N} \langle \mu | \phi_m \rangle |m\rangle \langle m| \quad (2.40)$$

avec D la dimension de la matrice A_μ appelée la *bond dimension*, les vecteurs $|m\rangle$ constituent une base d'un espace de Hilbert de dimension D . Elle correspond non seulement à la dimension des matrices mais également au nombre de termes de l'équation (2.39). On montre le lien entre ces deux représentations en injectant (2.40) dans (2.38) pour obtenir la somme d'états séparables (2.39) [5]

$$\begin{aligned} |\psi_S\rangle &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N=1}^2 \text{Tr}[A_{\mu_1} \dots A_{\mu_N}] |\mu_1 \dots \mu_N\rangle \\ &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N=1}^2 \sum_{m_1, \dots, m_N=1}^D |\mu_1 \dots \mu_N\rangle \langle \mu_1 \dots \mu_N | \phi_{m_1} \dots \phi_{m_N}\rangle \\ &\quad \times c_{m_1}^{1/N} \dots c_{m_N}^{1/N} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m_2 m_3} \dots \delta_{m_N m_1} \\ &= \sum_{m=1}^D c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ceci montre l'équivalence des écritures (2.27) et (2.38).

2.3.2 La bond dimension

Les auteurs de l'article [5] ont introduit la représentation DMPS dans l'objectif de définir la notion de *bond dimension*. Il est à noter que la bond dimension a déjà été introduite antérieurement, par exemple comme une mesure de l'intrication [30]. La bond dimension d'un état symétrique $|\psi_S\rangle$ est le nombre de coefficients c_m non nuls dans la représentation DMPS (2.27). Si aucun c_m n'est nul dans (2.27), alors la bond dimension est maximale et égale à $N + 1$. Si seuls $D < N + 1$ termes sont non nuls, alors on peut réécrire (2.27) comme

$$|\psi_S\rangle = \sum_{m=0}^D c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (2.42)$$

et la bond dimension vaut D . On définit également, pour tout $|\psi_S\rangle$, l'*optimal bond dimension* D_{op} , qui est la bond dimension minimale pour représenter l'état $|\psi_S\rangle$. En d'autres termes, pour un état $|\psi_S\rangle$ donné, il faut trouver la base $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$ pour lequel le nombre de coefficients c_m nuls est maximal, c'est-à-dire pour lequel le nombre de termes dans (2.42) est minimal.

Une propriété importante de l'optimal bond dimension est qu'elle est un invariant SLOCC. M. Sanz *et al.* [5] exploitent cette propriété pour définir des familles d'intrication à partir de l'optimal bond dimension. Les familles d'intrication sont notamment introduites pour pallier au fait que le nombre de classes d'intrication est infini pour des systèmes de 4 qubits ou plus. En général, on veut que les familles respectent plusieurs propriétés [5] :

- Tous les éléments d'une classe SLOCC doivent appartenir à la même famille.
- Tous les états séparables doivent appartenir à la même famille et, cette famille doit contenir uniquement ces états.

- Les classes SLOCC qui appartiennent à la même famille doivent avoir des propriétés physiques ou mathématiques communes.
- Le nombre de familles doit croître lentement avec le nombre de qubits N .
- Les efforts fournis pour identifier les familles d'un ensemble de N qubits doivent pouvoir être utilisés pour identifier les familles à $N + 1$ qubits.

Les familles introduites dans [5] répondent à ces propriétés. Elles se définissent comme suit : deux états appartiennent à la même famille si et seulement si ils ont la même optimal bond dimension. La première propriété est bien respectée puisque l'optimal bond dimension est un SLOCC invariant. M. Sanz *et al.* montrent également que les autres propriétés sont respectées [5].

2.3.3 Passage de la représentation de Dike à la représentation DMPSet vice-versa

On peut exprimer les coefficients d_k d'un état dans la base de Dicke en termes des coefficients c_m, α_m et β_m de l'écriture en termes d'états séparables (2.27).

Démonstration

Soit $|\psi_S\rangle \in \mathcal{H}_S$ de la forme (2.27) avec les vecteurs $|\phi_m\rangle = \alpha_m|0\rangle + \beta_m|1\rangle \quad \forall m = 0, \dots, N$. Les vecteurs $|\phi_m\rangle^{\otimes N}$ peuvent s'exprimer en fonction des états de Dicke selon [11]

$$|\phi_m\rangle^{\otimes N} = \sum_{k=0}^N \sqrt{C_N^k} \alpha_m^{N-k} \beta_m^k |D_N^{(k)}\rangle \quad (2.43)$$

En injectant cette équation dans (2.27), on obtient

$$\begin{aligned} |\psi_S\rangle &= \sum_{m=0}^N c_m \left(\sum_{k=0}^N \sqrt{C_N^k} \alpha_m^{N-k} \beta_m^k |D_N^{(k)}\rangle \right) \\ &= \sum_{k=0}^N \underbrace{\sqrt{C_N^k} \left(\sum_{m=0}^N c_m \alpha_m^{N-k} \beta_m^k \right)}_{d_k} |D_N^{(k)}\rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

On obtient donc les coefficients de Dicke d_k de l'état $|\psi_S\rangle$ en fonction des c_m, α_m et β_m

$$d_k = \sqrt{C_N^k} \sum_{m=0}^N c_m \alpha_m^{N-k} \beta_m^k \quad \forall k = 0, \dots, N \quad (2.45)$$

Inversement, si un état est exprimé dans la base de Dicke, on pourra résoudre le système de $N + 1$ équations (2.45) pour déterminer les coefficients c_m pour un choix de α_m, β_m donné.

2.3.4 Diverses représentations DMPS

Cette section introduit plusieurs représentations DMPS, c'est-à-dire, plusieurs ensembles $\{|\phi_m\rangle, m = 0, \dots, N\}$, qui constituent des bases particulières du sous-espace symétrique \mathcal{H}_S à N qubits.

La base "polygone régulier"

Il est possible de définir cette base pour n'importe quel nombre de qubits. Les vecteurs qui constituent cette base sont choisis de la forme

$$|\phi_m\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i\frac{m2\pi}{N+1}} \sin(\pi/4)|1\rangle \quad \forall m = 0, \dots, N \quad (2.46)$$

Sur la sphère de Bloch, cet ensemble de vecteurs est représenté par des points aux sommets d'un polygone régulier situé dans le plan de l'équateur, voir Figure 2.5⁶.

Explicitons maintenant le système d'équations (2.45) qui lie les coefficients d_k de la représentation de Dicke aux coefficients c_m de la base polygone régulier. Dans cette base, les α_m et β_m s'expriment respectivement comme $\cos(\theta_m/2)$ et $e^{i\varphi_m} \sin(\theta_m/2)$, avec

$$\theta_m = \pi/2 \quad \varphi_m = i\frac{2\pi m}{N+1} \quad \forall m = 0, \dots, N \quad (2.47)$$

L'équation (2.45) devient dès lors

$$d_k = \sqrt{C_N^k} \sum_{m=0}^N c_m \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{N-k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k e^{i\frac{2\pi m}{N+1}k}$$

soit

$$d_k = \sqrt{C_N^k} \sum_{m=0}^N \frac{c_m}{\sqrt{2}^N} e^{i\frac{2\pi m}{N+1}k} \quad \forall k = 0, \dots, N \quad (2.48)$$

La base pyramidale

Cette base peut également être définie pour n'importe quel nombre de qubits à partir d'une pyramide dont le sommet est situé au pôle nord de la sphère de Bloch, c'est-à-dire l'état $|0\rangle$, et dont les points constituant la base de la pyramide forment les sommets d'un polygone régulier dans le plan de l'équateur. Les vecteurs de la base pyramidale sont définis par

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle &= |0\rangle \\ |\phi_m\rangle &= \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i\frac{m2\pi}{N}} \sin(\pi/4)|1\rangle \quad \forall m = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.49)$$

La Figure 2.5 illustre les vecteurs de cette base pyramidale pour le cas à 5 qubits sur la sphère de Bloch. Explicitons la relation (2.45) dans le cas de la base pyramidale. Les coefficients α_m et β_m s'expriment comme toujours $\cos(\theta_m/2)$ et $e^{i\varphi_m} \sin(\theta_m/2)$, cette fois avec

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 & \varphi_0 &= 0 \\ \theta_m &= \pi/2 & \varphi_m &= \frac{2\pi m}{N} \quad \forall m = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le système d'équations (2.45) devient alors après simplification

$$\begin{cases} d_0 = c_0 + \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{\sqrt{2}^N} \\ d_k = \sqrt{C_N^k} \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{\sqrt{2}^N} e^{i\frac{2\pi m}{N}k} \end{cases} \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (2.51)$$

La base bipyramidale

6. Remarquons que pour N qubits, le polygone définissant la base possède $N+1$ sommets. Nous verrons au chapitre suivant que l'état GHZ a pour représentation de Majorana un polygone à N sommets.

Comme les deux bases précédentes, cette base peut être définie pour n'importe quel nombre de qubits. Il s'agit d'une base où un point est situé au pôle nord de la sphère de Bloch, c'est-à-dire dont le vecteur ket est l'état $|0\rangle$, et un autre point au pôle sud, qui représente l'état $|1\rangle$. Les autres vecteurs forment un polygone régulier dans le plan de l'équateur. Ainsi, les vecteurs de la base bipyramidale sont définis comme

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle &= |0\rangle \\ |\phi_1\rangle &= |1\rangle \\ |\phi_m\rangle &= \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i\frac{m2\pi}{N-1}} \sin(\pi/4)|1\rangle \quad \forall m = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.52)$$

La Figure 2.5 représente les vecteurs de cette base bipyramidale pour le cas de 5 qubits par des points sur la sphère de Bloch.

Explicitons à nouveau la relation (2.45). Cette fois les angles θ_m, φ_m sont donnés par

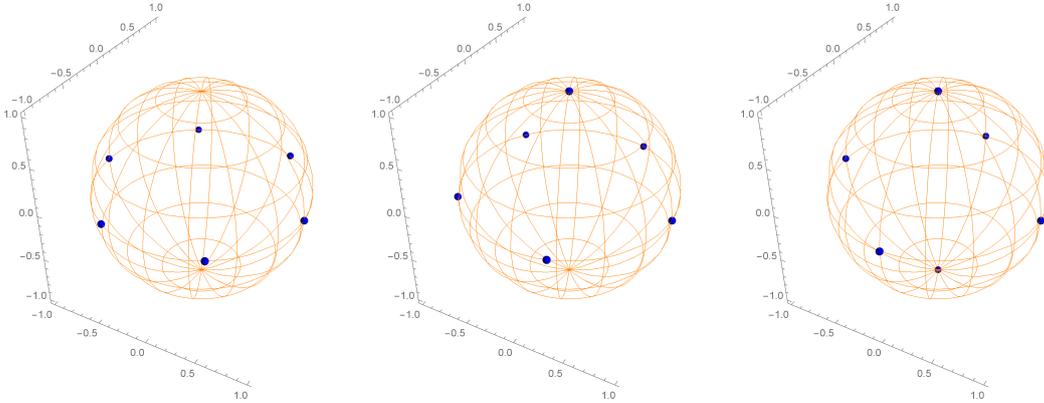


FIGURE 2.5 – De gauche à droite, représentations des vecteurs constituant la base polygone régulier, pyramidale et bipyramidale, c'est-à-dire les vecteurs des équations (2.46), (2.49) et (2.52), sur la sphère de Bloch dans le cas à 5 qubits.

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0 & \varphi_0 &= 0 & \text{pour } m &= 0 \\ \theta_1 &= 0 & \varphi_1 &= 0 & \text{pour } m &= 1 \\ \theta_m &= \pi/2 & \varphi_m &= e^{i\frac{2\pi m}{N-1}} & \forall m &= 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.53)$$

et le système (2.45) après simplifications,

$$\begin{cases} d_0 = c_0 + \sum_{m=2}^N \frac{c_m}{\sqrt{2}^N} \\ d_k = \sqrt{C_N^k} \sum_{m=2}^N \frac{c_m}{\sqrt{2}^N} e^{i\frac{2\pi m}{N-1}k} \\ d_N = c_1 + \sum_{m=2}^N \frac{c_m}{\sqrt{2}^N} e^{i\frac{2\pi m}{N-1}N} \end{cases} \quad \forall k = 1, \dots, N-1 \quad (2.54)$$

2.4 La représentation de Mandilara *et al.*

Cette représentation a été introduite par A. Mandilara *et al.* dans [6], cette section résume cet article. La représentation de Mandilara *et al.* a pour principal intérêt d'introduire des formes canoniques pour certaines classes LOCC et SLOCC. Ces formes canoniques donnent une méthode efficace

pour savoir si deux états appartiennent à la même classe. En effet, il suffit de calculer la forme canonique de ces deux états, si elles sont identiques, alors ces deux états appartiennent à la même classe. Ces formes canoniques sont des représentants uniques de chaque classe. La représentation de Mandilara *et al.* [6] est au même titre que la représentation DMPS, une représentation sous forme d'une somme d'états séparables, dans le sens où un état symétrique, plus particulièrement un état générique (nous définirons ce terme plus loin), peut s'écrire sous la forme d'une somme d'états séparables. Néanmoins la représentation de Mandilara *et al.* ne peut pas réellement être vue comme une représentation DMPS. En effet, pour la représentation précédente, on se choisit $N + 1$ vecteurs symétriques séparables linéairement indépendants, et on peut écrire n'importe quel état symétrique sous forme de combinaison linéaire de ces $N + 1$ vecteurs. Dans la représentation de Mandilara *et al.*, par contre, nous n'avons pas le choix de la base de vecteurs séparables car ils sont imposés par le vecteur symétrique que l'on veut décomposer. Ce qui implique une différence fondamentale entre les représentations DMPS et celle de Mandilara *et al.* : cette dernière est **unique**. De plus, tous les vecteurs symétriques n'ont pas une représentation de Mandilara *et al.*. Le nombre de termes dans cette représentation est également, en général, plus petit que celui pour les représentations DMPS ($N + 1$). Seuls certains états symétriques ont une représentation de Mandilara *et al.*, seuls les états génériques possèdent cette décomposition. Avant d'introduire ce concept, il faut préciser que ces notions varient légèrement suivant la parité du nombre de qubits N . Dans la suite, on présente le cas impair suivi immédiatement par le cas où N est pair. Soit **les états génériques** appartenant à \mathcal{H}_S , qui sont définis comme les états symétriques de N qubits dont la dégénérescence (γ) la plus élevée dans les racines du polynôme de Majorana est telle que

$$\gamma < \frac{N+1}{2} \quad \text{ou} \quad \gamma = N \quad \text{si } N \text{ est impair} \quad (2.55)$$

$$\gamma < \frac{N}{2} + 1 \quad \text{ou} \quad \gamma = N \quad \text{si } N \text{ est pair} \quad (2.56)$$

Ces états possèdent alors **une représentation de Mandilara *et al.* unique**, donnée par

$$|\psi_{\text{odd}}\rangle = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad \text{Si } N \text{ est impair} \quad (2.57)$$

avec $c_m \in \mathbb{C}$, tel que $|c_0| > |c_1| > \dots > |c_{(N-1)/2}|$ et

$$|\phi_m\rangle = \cos \theta_m |0\rangle + \sin \theta_m e^{i\varphi_m} |1\rangle \quad (2.58)$$

avec $\theta_m, \varphi_m \in \mathbb{R}$, et

$$|\psi_{\text{even}}\rangle = c_0 |\phi_0\rangle^{\otimes N} + c_1 |\phi_0^\perp\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=2}^{N/2} c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad \text{Si } N \text{ est pair} \quad (2.59)$$

avec les coefficients $c_0, c_m^\perp, c_m \in \mathbb{C}$, tels que $|c_2| > \dots > |c_{N/2}|$ et $|c_0| > |c_1|$ et les $|\phi_m\rangle$ définis comme pour le cas impair, avec en plus la condition que $\langle \phi_0 | \phi_0^\perp \rangle = 0$.

Ainsi, pour déterminer la décomposition de Mandilara *et al.* d'un état générique, il faut connaître à la fois les coefficients c_m mais aussi les angles θ_m et φ_m qui caractérisent les vecteurs $|\phi_m\rangle$. Il sera expliqué plus loin comment obtenir ces angles et ces paramètres à partir des coefficients de Dicke. On en profitera également pour montrer que la représentation de Mandilara *et al.* est unique pour un état donné.

Il est utile de réécrire les équations (2.57) et (2.59) sous une forme légèrement différente que l'on va appeler **forme de Mandilara *et al.* réarrangée**.

$$|\psi_{odd}\rangle = \mathcal{N}(|\phi_0\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} y_m e^{ik_m} |\phi_m\rangle^{\otimes N}) \quad \text{Si } N \text{ est impair} \quad (2.60)$$

$$|\psi_{odd}\rangle = \mathcal{N}(|\phi_0\rangle^{\otimes N} + y_1 e^{ik_1} |\phi_0^\perp\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=2}^{N/2} y_m e^{ik_m} |\phi_m\rangle^{\otimes N}) \quad \text{Si } N \text{ est pair} \quad (2.61)$$

avec \mathcal{N} un facteur de normalisation, $y_m = |c_m/c_0|$ et $e^{ik_m} = c_m(c_0 y_m)^{-1}$. Cette forme va être plus pratique pour passer ensuite aux formes canoniques.

2.4.1 La forme canonique LOCC

Comme déjà mentionné dans les rappels théoriques, il existe deux façons de classifier l'intrication, c'est-à-dire de regrouper les états en classes en fonction de leurs propriétés d'intrication : la classification LOCC et la classification SLOCC. A. Mandilara *et al.* construisent, à partir de leur représentation, des formes canoniques pour les classes LOCC ou SLOCC. Grâce à ces formes canoniques qui ont la propriété d'être uniques, il devient possible de vérifier de façon systématique si deux états génériques appartiennent à la même classe (S)LOCC. Ce sera le cas si et seulement si leurs formes canoniques sont égales.

Pour rappel, il a été montré que chaque classe LOCC comprend les états reliés entre eux par des transformations unitaires locales (LU). En se concentrant uniquement sur le sous-espace symétrique, les transformations unitaires locales sont équivalentes aux transformations collectives $SU(2)^{\otimes N} = SU(2) \otimes \dots \otimes SU(2)$, où toutes les transformations $SU(2)$ s'appliquant sur un seul qubit sont identiques et paramétrées par 3 nombres réels⁷.

Un état symétrique est caractérisé par N paramètres complexes⁸, soit $2N$ paramètres réels. Il est donc possible, pour un état symétrique, d'identifier $2N - 3$ invariants sous transformations unitaires locales. Plusieurs méthodes existent pour définir et calculer ces invariants. Le passage par une forme canonique en est une.

Il faut encore mentionner une propriété des transformations unitaires locales : si on applique une transformation LU sur un état symétrique, la représentation de Majorana après la transformation est une simple rotation de la représentation de Majorana de l'état avant la transformation. La Figure 2.6

7. En effet, le groupe $SU(2)$ est caractérisé comme suit : $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$. Une transformation LU est donc bien caractérisée par 2 nombres complexes, soit 4 réels, mais, comme il existe une contrainte, seulement 3 nombres réels suffisent à caractériser une transformation LU.

8. Un état symétrique est caractérisé par $N + 1$ coefficients complexes. La normalisation et la phase globale imposent deux contraintes réelles. Au final l'état est bien caractérisé par $2N$ paramètres réels.

illustre cette propriété.

La forme canonique d'une classe est un état particulier qui va "représenter" cette classe. Mandilara

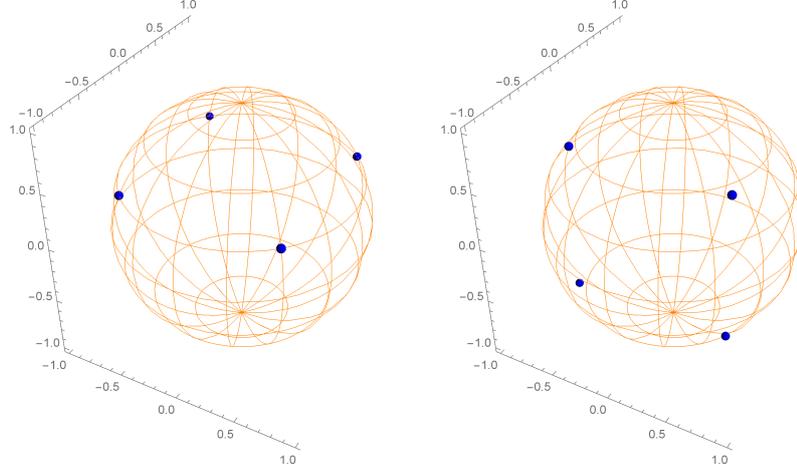


FIGURE 2.6 – A gauche, représentation de Majorana de l'état symétrique $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{26}}(5|D_4^{(0)}\rangle + |D_4^{(4)}\rangle)$. A droite, la représentation du même état après une transformation LU correspondant à une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe x. L'état après rotation est $|\psi'_S\rangle = (\frac{3}{2\sqrt{26}}|D_4^{(0)}\rangle - i\sqrt{\frac{2}{13}}|D_4^{(1)}\rangle - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{13}}|D_4^{(2)}\rangle + i\sqrt{\frac{2}{13}}|D_4^{(3)}\rangle + \frac{3}{2\sqrt{26}}|D_4^{(4)}\rangle)$

et al. imposent qu'un état est de forme canonique si et seulement si il est de forme

$$|\psi_{\text{odd}}^{\text{cano}}\rangle = \mathcal{N}(|0\rangle^{\otimes N} + y_1|\chi_1\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=2}^{(N-1)/2} y_m e^{il_m} |\chi_m\rangle^{\otimes N}) \quad \text{Si } N \text{ est impair} \quad (2.62)$$

$$|\psi_{\text{even}}^{\text{cano}}\rangle = \mathcal{N}(|0\rangle^{\otimes N} + y_1|1\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=2}^{N/2} y_m e^{il_m} |\chi_m\rangle^{\otimes N}) \quad \text{Si } N \text{ est pair} \quad (2.63)$$

avec $y_m \in [0, 1]$, $l_m \in [0, 2\pi]$, \mathcal{N} un facteur de normalisation, et $|\chi_m\rangle$ de la forme (2.58). On peut définir $2N - 3$ invariants LU comme étant les paramètres y_m, l_m, θ_m , et φ_m . Les formes canoniques sont uniques [6].

Remarquons que ces formes canoniques sont valables uniquement pour les états génériques. Elles permettent de savoir si à quelle classe appartient un état. Il suffit, en effet, de calculer sa forme canonique pour savoir à quelle classe il appartient.

Construction de la forme canonique LOCC

Il est relativement aisé de construire la forme canonique d'un état à partir de sa représentation de Mandilara *et al.*. Il suffit de lui appliquer la transformation LU qui est telle que le vecteur $|\phi_0\rangle^{\otimes N}$ de l'équation (2.60) devienne après transformation le vecteur $|0\rangle^{\otimes N}$ (et, en plus, pour le cas pair que $|\phi_0^\perp\rangle^{\otimes N}$ devienne $|1\rangle^{\otimes N}$). En d'autres termes, il faut trouver l'opérateur unitaire $\hat{U} \in SU(2)^{\otimes N}$ qui est tel que $\hat{U}|\psi_{\text{odd}}\rangle = |\psi_{\text{odd}}^{\text{cano}}\rangle$ ($\hat{U}|\psi_{\text{even}}\rangle = |\psi_{\text{even}}^{\text{cano}}\rangle$ pour le cas pair).

2.4.2 La forme canonique SLOCC

La deuxième méthode de classification est la classification SLOCC. Il a été montré [22, 23], que deux états appartiennent à la même classe SLOCC si, et seulement si, ils peuvent être transformés l'un en l'autre par une opération inversible locale (ILO). De telles opérations forment le groupe $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes N} = SL(2, \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes SL(2, \mathbb{C})$. Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ peut être vu comme juste une complexification du groupe $SU(2)$ et est donc caractérisé par 3 nombres complexes, soit 6 nombres réels. Ainsi, il existe donc $2N - 6$ invariants réels pour un état symétrique sous transformation ILO. Comme pour le cas des transformations LU, différentes méthodes existent pour calculer ces invariants.

D'un point de vue géométrique, dans la représentation de Majorana, effectuer une transformation ILO, c'est-à-dire faire agir un opérateur appartenant à $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes N}$ sur un état symétrique, revient à effectuer une transformation de Möbius sur les points de Majorana de cet état [31, 26].

Comme pour le cas LOCC, un état de forme canonique est un représentant de sa classe. Un état est de forme canonique s'il s'écrit comme

$$|\psi_{\text{odd}}\rangle = \mathcal{N}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=2}^{(N-1)/2} \lambda_m e^{il_m} |\chi_m\rangle^{\otimes N}) \quad \text{si } N \text{ est impair} \quad (2.64)$$

$$|\psi_{\text{even}}\rangle = \mathcal{N}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N} + \lambda |c\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=3}^{N/2} \lambda_m e^{il_m} |\chi_m\rangle^{\otimes N}) \quad \text{si } N \text{ est pair} \quad (2.65)$$

avec \mathcal{N} un facteur de normalisation, λ_m et $l_m \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|c\rangle = (c|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{1+|c|^2}$ et $|\chi_m\rangle$ défini toujours comme (2.58). Les coefficients c et λ ne sont pas indépendants. Le lien entre ces deux nombres est donné dans le complément d'information de [6]. Comme pour le cas LOCC, les formes canoniques permettent de donner $2N - 6$ invariants SLOCC : λ_m, l_m, θ_m et φ_m (avec, en plus, la partie réelle et imaginaire du complexe λ pour le cas pair).

Encore une fois, ces formes canoniques existent uniquement pour les états génériques et sont uniques. Elles permettent de caractériser toutes les classes pour ces états génériques. En calculant la forme canonique d'un état, on sait immédiatement à quelle classe SLOCC il appartient.

Construction de la forme canonique SLOCC

La construction de la forme canonique SLOCC s'effectue de la même façon que la LOCC, à l'exception près que cette fois, il faut trouver un opérateur appartenant à $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes N}$ qui transforme $|\phi_0\rangle^{\otimes N}$ et $|\phi_1\rangle^{\otimes N}$ en $|0\rangle^{\otimes N}$ et $|1\rangle^{\otimes N}$ respectivement, mais aussi $y_1 e^{ik_1}$ en 1.

Forme canonique SLOCC et matrice densité réduite

Une des motivations initiales de l'étude de la représentation de Mandilara *et al.* était la recherche d'états génériques maximalelement intriqués (au sens d'une entropie d'intrication maximale). Dorian Baguette *et al.*, ont prouvé que dans les classes SLOCC d'états non-génériques, il n'existe pas d'états maximalelement intriqués [11]. Naturellement, on se pose alors la question suivante : *Toutes les classes SLOCC d'états génériques possèdent-elles au moins un état maximalelement intriqué?* Dans ce mémoire, nous avons voulu savoir si les formes canoniques SLOCC de Mandilara *et al.* avaient une telle propriété. On a répondu par la négative à cette question. L'étude de la forme canonique de certains états

a montré qu'elles ne sont pas forcément maximalement intriquées. Bien que l'on n'ait pas encore explicité comment construire la représentation de Mandilara *et al.* à partir de celle de Dicke, on profite de cette section sur les formes canoniques SLOCC pour en présenter un exemple qui n'est pas maximalement intriquée.

Soit l'état $|\psi_S\rangle$ à 5 qubits qui s'exprime dans la base de Dicke comme

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}|D_5^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}|D_5^{(2)}\rangle + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}|D_5^{(4)}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|D_5^{(5)}\rangle \quad (2.66)$$

Dans la représentation de Mandilara *et al.*, cet état s'écrit comme

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)^{\otimes 5} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)^{\otimes 5} + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle^{\otimes 5} \quad (2.67)$$

On peut déjà souligner que la matrice densité réduite à un qubit de cet état n'est pas maximalement mélangée. En effet, elle est donnée par

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{6\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

L'entropie d'intrication est donc $S(\rho_1) = 0.607329$, elle n'est donc évidemment non-maximale. On peut ensuite construire la forme canonique SLOCC de cet état

$$|\psi_S^{\text{cano}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle^{\otimes 5} + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle^{\otimes 5} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)^{\otimes 5} \quad (2.69)$$

qui, dans la représentation de Dicke, s'exprime comme

$$\begin{aligned} |\psi_S^{\text{cano}}\rangle = & \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{6}}\right)|D_5^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{6}}|D_5^{(1)}\rangle - \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}|D_5^{(2)}\rangle \\ & + \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}|D_5^{(3)}\rangle - \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{6}}|D_5^{(4)}\rangle + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{6}}\right)|D_5^{(5)}\rangle \end{aligned} \quad (2.70)$$

Le graphique 2.7 donne la représentation graphique de Majorana de cet état $|\psi_S\rangle$ et de sa forme canonique SLOCC.

Enfin, si l'on calcule la matrice densité réduite de cette forme canonique SLOCC, on obtient la matrice

$$\rho_1^{\text{cano}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}(6 - \sqrt{2}) & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12}(6 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

qui n'est pas maximalement mélangée, et donc, qui ne donne pas lieu à une entropie d'intrication maximale. En effet, si on calcule cette grandeur on obtient $S(\rho_1^{\text{cano}}) = 0.607329$. L'entropie d'intrication de l'état $|\psi_S\rangle$ est donc la même que celle de la forme canonique de cet état. Il s'agit d'une coïncidence. Dans le chapitre 3, on montre que ce n'est, en générale, pas le cas.

2.4.3 Passage de la représentation de Dicke à Mandilara *et al.*

On va montrer ici comment à partir de la représentation d'un état dans la base de Dicke on peut construire la représentation de Mandilara *et al.*. On montre, par la même occasion, que pour un état générique donné, la décomposition de Mandilara est unique. Dans cette sous-section, on expliquera

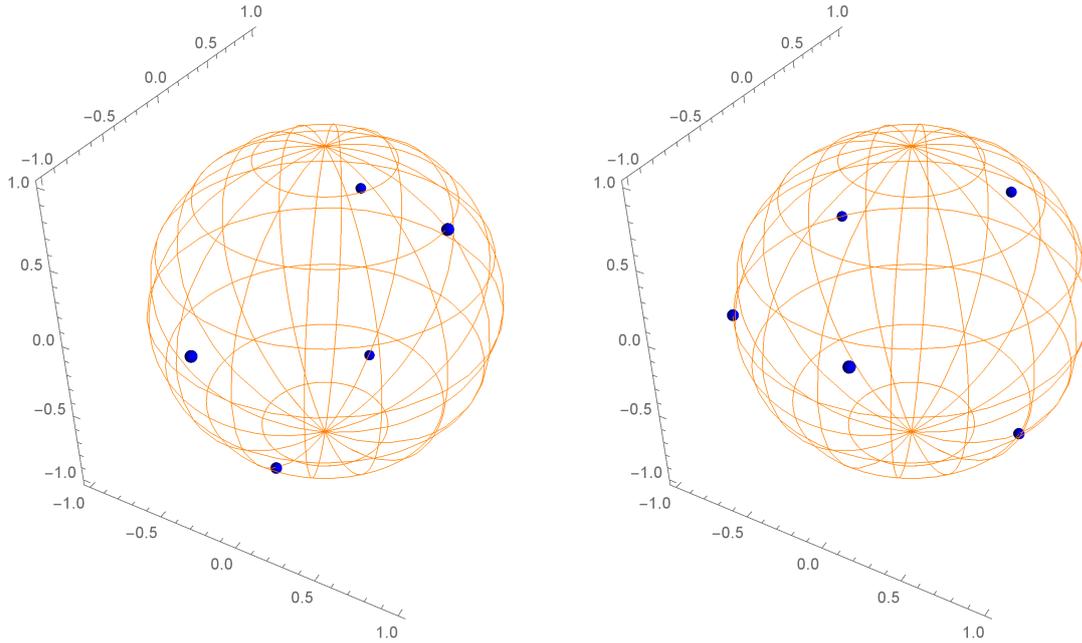


FIGURE 2.7 – A gauche, la représentation de Majorana de l'état $|\psi_S\rangle$. A droite, la représentation de Majorana de la forme canonique de cet état.

aussi pourquoi seuls les états génériques admettent une représentation de Mandilara *et al.*. Comme la forme de Mandilara *et al.* n'est pas la même dans le cas d'un nombre de qubits impair ou pair, nous étudierons d'abord le cas impair puis, en nous basant sur les preuves de ce cas, nous effectuerons celles pour le cas pair. Les démonstrations effectuées ici ont initialement été effectuées dans le complément d'information de [6].

Démonstration

a) Cas N impair

Passage de la représentation de Dicke à Mandilara *et al.* :

Il faut montrer qu'un état $|\psi_{\text{odd}}\rangle$ écrit dans la base de Dicke peut se réécrire sous la forme (2.57).

Pour prouver cela, on montre qu'à partir de (2.57) il est possible de construire un polynôme que l'on égale au polynôme de Majorana de l'état $|\psi_{\text{odd}}\rangle$. Grâce aux racines du polynôme de Majorana, nous allons pouvoir déterminer les paramètres inconnus de (2.57), c'est-à-dire les c_m , θ_m et φ_m .

Soit $|\psi_{\text{odd}}\rangle$ écrit dans la base de Dicke : $|\psi_{\text{odd}}\rangle = \sum_{k=0}^N d_k |D_N^{(k)}\rangle$. Pour rappel, à tout état $|\psi_{\text{odd}}\rangle$, on associe le polynôme de Majorana (2.16) que l'on réécrit : $P_{\text{Maj}}(\alpha) = \sum_{m=0}^N \lambda_m \alpha^m$ avec comme racines de ce polynôme, les N nombres $\{\alpha_i, i = 1, \dots, N\}$. On décide d'appeler α_0 l'expression $\alpha_0 \equiv P_{\text{Maj}}(0)$. On peut trouver les coefficients (2.17) et les racines (2.18) de ce polynôme à partir des coefficients de l'état dans la base de Dicke.

Pour des raisons pratiques, nous n'allons pas construire le polynôme à partir de (2.57), mais plutôt à

partir de l'état suivant

$$|\psi_{\text{odd}}\rangle = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m |\phi'_m\rangle^{\otimes N} \quad (2.72)$$

avec $|\phi'_m\rangle$ des vecteurs non-normalisés

$$|\phi'_m\rangle = (|0\rangle + \beta_m |1\rangle)$$

Nous choisissons les c'_m, β_m tels qu'il existe une relation entre ces nombres et les $c_m, |\phi_m\rangle = \cos(\theta_m/2)|0\rangle + \sin(\theta_m/2)e^{i\varphi_m}|1\rangle$:

$$\beta_m = e^{i\varphi_m \tan(\theta_m/2)} \quad c'_m = \frac{c'_m}{(1 + |\beta_m|^2)^{N/2}} \quad (2.73)$$

Ensuite, on projette $|\psi_{\text{odd}}\rangle$ sur l'état $|\alpha\rangle^{\otimes N}$ avec $|\alpha\rangle = |0\rangle + \alpha^* |1\rangle$, afin d'obtenir un polynôme $P(\alpha)$ que l'on égale à celui de Majorana $P_{\text{Maj}}(\alpha)$

$$P(\alpha) = \langle \alpha |^{\otimes N} \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m |\phi'_m\rangle^{\otimes N} = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m (1 + \alpha\beta_m)^N = P_{\text{Maj}}(\alpha) \quad (2.74)$$

L'objectif est maintenant de déterminer l'ensemble des $\{\beta_m\}$ et $\{c'_m\}$, soit $N - 1$ paramètres, à partir des N racines $\alpha_i, i = 1, \dots, N$. Une fois cela fait, grâce aux relations (2.73), nous pourrons construire la représentation de Mandilara *et al.* (2.57). Nous aurons alors non seulement prouvé qu'elle existe pour tout état générique, mais nous l'aurons également construite pour ces états. Comme on a égalé $P(\alpha) = P_{\text{Maj}}(\alpha)$, les deux polynômes ont forcément les mêmes racines. Ainsi, pour chaque racine α_i , on peut écrire les équations suivantes

$$\sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m (1 + \alpha_i \beta_m)^N = 0 \quad (2.75)$$

En plus de cet ensemble de N équations, on en écrit une supplémentaire : $P_{\text{Maj}}(0) = P(0) = \alpha_0$:

$$\sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m = 0 \quad (2.76)$$

On remarque que les équations (2.75) forment un système sur-défini pour déterminer les c'_m . En effet, nous avons $N + 1$ équations alors que nous avons seulement $(N + 1)/2$ paramètres c'_m . Ainsi, le système est linéairement dépendant. Un moyen d'imposer cette dépendance linéaire est d'introduire N vecteurs à $\frac{N+1}{2} + 1$ composantes, un pour chaque α_i , définis comme suit

$$V_i = \begin{pmatrix} (1 + \alpha_i \beta_0)^N \\ (1 + \alpha_i \beta_1)^N \\ \vdots \\ (1 + \alpha_i \beta_{(N+1)/2})^N \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

On peut alors imposer la dépendance linéaire, en imposant que chacun des vecteurs avec $i \geq (N + 1)/2$ appartient au sous-espace sous-tendu par les $(N - 1)/2$ premiers. Autrement dit, on impose que

l'ensemble $\{V_0, V_1, \dots, V_{(N-1)/2}, V_i\}$ ($\forall i \geq (N+1)/2$) est linéairement dépendant. On peut encore exprimer cette condition, en imposant que le déterminant de la matrice formée par les vecteurs $V_0, V_1, \dots, V_{(N-1)/2}, V_i$ soit nul. Nous obtenons un ensemble de $N - (N - 1/2) = (N + 1)/2$ équations qui se présentent sous la forme

$$\det \begin{pmatrix} (1 + \alpha_1 \beta_0)^N & (1 + \alpha_1 \beta_1)^N & \dots & (1 + \alpha_1 \beta_{(N-1)/2})^N \\ (1 + \alpha_2 \beta_0)^N & (1 + \alpha_2 \beta_1)^N & \dots & (1 + \alpha_2 \beta_{(N-1)/2})^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 + \alpha_{(N-1)/2} \beta_0)^N & (1 + \alpha_{(N-1)/2} \beta_1)^N & \dots & (1 + \alpha_{(N-1)/2} \beta_{(N-1)/2})^N \\ (1 + \alpha_i \beta_0)^N & (1 + \alpha_i \beta_1)^N & \dots & (1 + \alpha_i \beta_{(N-1)/2})^N \end{pmatrix} = 0 \quad (2.78)$$

Ainsi, cet ensemble de $(N + 1)/2$ équations permet de déterminer l'ensemble des $(N + 1)/2$ inconnues β_m . On peut montrer que la dégénérescence des β_m est liée à celle des α_m , nous évoquerons plus précisément ce lien plus tard. Ensuite, il suffit d'utiliser l'équation (2.76) et n'importe quelles $(N - 1)/2$ équations de l'ensemble d'équations (2.75) pour calculer les c'_m . Pour terminer, on utilise les relations (2.73), pour calculer les $|\phi_m\rangle$ et les c_m . Nous avons réussi à construire à partir du polynôme de Majorana, la représentation de Mandilara *et al.* pour l'état $|\psi_{\text{odd}}\rangle$.

Unicité de la forme de Mandilara *et al.*

La décomposition (2.57) est unique. Or pour calculer les $\{\beta_m\}$, on doit résoudre le déterminant (2.78) qui est un polynôme d'ordre élevé en les $\{\beta_m\}$. Ainsi, il existe plusieurs solutions possibles pour les $\{\beta_m\}$. Néanmoins, un seul de ces ensembles de solutions va permettre de trouver des solutions pour les $\{c'_m\}$. La preuve de cette unicité n'est pas évidente, et nécessite une étude poussée du déterminant (2.78). Nous n'effectuerons pas cette preuve ici, et nous laissons le lecteur intéressé consulter le complément d'information de [6] pour cette démonstration.

Preuve que seuls les états génériques possèdent une représentation de Mandilara

Il faut montrer que seuls les états génériques peuvent se décomposer en cette forme de Mandilara et al.. En d'autres termes, il faut montrer que si la dégénérescence la plus élevée des racines du polynôme de Majorana (γ) est comprise entre $[\frac{N+1}{2}, N - 1]$ alors l'état ne peut pas se décomposer en (2.57). Dans les démonstrations précédentes, on avait supposé que les α_i étaient tous non-dégénérés. On considère maintenant le cas plus général où les α peuvent être dégénérés.

Si un ou plusieurs α sont dégénérés l fois, alors les équations (2.75) et (2.76) ne sont plus suffisantes pour trouver tous les β_m et c'_m . Dans ce cas, on introduit de nouvelles équations au système déjà existant :

$$\frac{d^j P(\alpha)}{d\alpha^j} \Big|_{\alpha=\alpha_k} = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m \beta_m^j (1 + \alpha_k \beta_m)^{N-j} = 0 \quad (2.79)$$

où $j = 1, \dots, l - 1$. La solution reste unique dans le cas où l n'est pas trop élevé. Mais si l appartient à l'intervalle $[\frac{N+1}{2}, N - 1]$, c'est-à-dire si $|\psi_{\text{odd}}\rangle$ n'est pas un état générique, alors on montre que tous les β_m sont égaux, et donc, vu le système d'équations (2.75), qu'il n'est pas possible de déterminer des solutions pour les c'_m .

Commençons par le cas où la dégénérescence la plus haute des α (γ) vaut $\frac{N+1}{2}$. Soit α_k est de dégénérescence $\frac{N+1}{2}$. On peut construire un déterminant similaire à celui de l'équation (2.78), en utilisant

les équations (2.75), (2.79) et l'équation

$$\sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_m (1 + \alpha_k \beta_m)^N = 0 \quad (2.80)$$

On obtient alors, quand on impose que ce nouveau déterminant soit nul,

$$\prod_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} (1 + \alpha_k \beta_m)^{\frac{N-1}{2}} \prod_{i=0, j=0, (j>i)}^{\frac{N-1}{2}} (\beta_i - \beta_j) = 0 \quad (2.81)$$

Pour que cette condition soit remplie, il faut donc qu'au moins un facteur $(1 + \alpha_k \beta_m) = 0$, ou que deux β_m coïncident. Dans les deux cas, le système qui contenait initialement $\frac{N+1}{2}$ inconnues en contient désormais $\frac{N-1}{2}$. Ainsi, on peut construire un nouveau déterminant similaire à (2.81) en prenant cette fois $\frac{N-1}{2}$ équations (2.79) et (2.80). Le déterminant obtenu est similaire à (2.81), et à nouveau il faut que deux β_m coïncident ou que $(1 + \alpha_k \beta_m) = 0$, on peut ensuite créer un nouveau déterminant et ainsi de suite. En appliquant $(N-3)/2$ fois cette procédure on arrive à la conclusion que tous les β_m coïncident, et donc qu'il n'y a pas de solution pour le calcul des c'_m , et, par voie de conséquence, qu'on ne peut écrire l'état dans la forme de Mandilara *et al.*. On peut effectuer un raisonnement tout à fait analogue pour les autres degrés de dégénérescence : $\frac{N+1}{2} < \gamma < N$.

b) Cas N pair

Passage de la représentation de Dicke à Mandilara *et al.*

Il faut montrer qu'un état $|\psi_{\text{even}}\rangle$ écrit dans la base de Dicke, peut se réécrire sous la forme (2.59). Ce cas se traite de façon similaire au cas impair, avec néanmoins une légère différence. On veut cette fois que la décomposition soit (2.59). Soit, on suppose que $|\phi_0^\perp\rangle = |\psi_1\rangle$ où $|\psi_1\rangle$ est indépendant de $|\psi_0\rangle$. On effectue exactement les mêmes étapes que pour le cas impair pour identifier les $N+1$ inconnues $\beta_{m \neq 1}$ dans les polynômes :

$$P(\alpha) = \sum_{m=0}^{N/2} c'_m (1 + \alpha \beta_m)^N = 0 \quad (2.82)$$

avec comme données les racines du polynôme de Majorana, c'est-à-dire N valeurs de α , et le paramètre libre β_1 . On effectue ensuite les mêmes étapes que pour le cas impair pour trouver les $\beta_{m \neq 1}$. Ainsi, il reste, au final, à déterminer le paramètre β_1 . On doit imposer une nouvelle condition, pour le calcul de ce paramètre, pour que la décomposition soit unique aux permutations près. La dépendance des paramètres $\beta_{m \neq 1}$ en le paramètre β_1 donne la condition suivante :

$$\prod_{i=0}^{N/2} (1 + \beta_i^* \beta_1) = 0 \quad (2.83)$$

La solution qui résulte de cette équation n'est pas unique dans le sens où $|\psi_1\rangle$ peut être orthogonal à n'importe quels autres états $|\psi_i\rangle$. En d'autres mots, il y a N solutions différentes et il faut imposer une condition supplémentaire pour que la solution soit unique. On choisit la solution qui maximise l'amplitude $|c_0|$ pour $|\phi_0\rangle^{\otimes N}$. Ensuite, on effectue les mêmes étapes que dans le cas impair pour calculer les c'_m , puis les c_m et les $|\phi_m\rangle$. On a ainsi bien réussi à obtenir, à partir de la représentation dans la base de Dicke et des racines du polynôme de Majorana, la représentation (2.59).

2.4.4 Passage de la représentation de Mandilara *et al.* à Dicke

Le passage de la représentation de Mandilara *et al.* à la base de Dicke est bien plus simple que le passage inverse. En effet, il suffit de décomposer les vecteurs $|\phi_m\rangle$ de (2.57) (ou de (2.59) dans le cas où N est pair) dans la base de Dicke. Cette opération est aisée puisque les kets $|\phi_m\rangle$ sont des états séparables qui s'écrivent comme (2.58), et donc qui s'expriment dans la base de Dicke comme (2.28). Évidemment cette décomposition est également unique puisque les vecteurs kets $|\phi_m\rangle$ ne se décomposent que de façon unique dans la base de Dicke.

2.4.5 Passage de la représentation de Mandilara *et al.* à la représentation DMPS

Il est possible à partir d'un état exprimé dans la représentation de Mandilara *et al.*, de le réexprimer sous la forme d'une représentation DMPS. Soit un état symétrique $|\psi_S\rangle$ écrit comme (2.57) (on considère le cas impair, mais le cas pair est totalement similaire) et soit un ensemble de vecteurs $\{|\varphi_i\rangle, i = 1, \dots, N\}$ qui constituent une base, c'est-à-dire les vecteurs de "base" d'une représentation DMPS. Partant de la représentation de Mandilara *et al.* nous avons successivement

$$\begin{aligned}
 |\psi_S\rangle &= \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \\
 &= \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c_m \left(\sum_{i=0}^N c'_i |\varphi_i\rangle \right) \\
 &= \sum_{i=0}^N \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{(N-1)/2} c'_i c_m \right)}_{c'_i} |\varphi_i\rangle
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Cette dernière équation est bien la représentation DMPS (2.27). Le passage inverse, c'est-à-dire commencer avec un état écrit sous forme (2.27) et l'écrire sous forme de Mandilara *et al.* (2.57) (ou (2.59)) est bien plus ardu. La solution la plus simple que nous avons trouvée est de repasser par la représentation de Dicke.

2.4.6 Lien entre la représentation de Mandilara *et al.* et la bond dimension

En étudiant la représentation de Mandilara *et al.*, on a pu obtenir certains résultats supplémentaires sur la représentation DMPS, plus particulièrement sur l'optimal bond dimension. Considérons le cas N impair (le cas pair se traite de façon similaire). On sait qu'un état générique $|\psi_{\text{odd}}\rangle$ peut toujours s'écrire sous la forme de Mandilara *et al.* (2.57). De là, il est évident que l'optimal bond dimension D_{op} est nécessairement inférieure ou égale à $(N + 1)/2$. Le lien ne s'arrête pas là. Si, dans la représentation de Mandilara *et al.*, on a exactement $D \leq (N + 1)/2$ coefficients non nuls, c'est-à-dire l'état peut s'écrire sous la forme de Mandilara *et al.*

$$|\psi_{\text{odd}}\rangle = \sum_{m=0}^{D-1} c_m |\phi_m\rangle^{\otimes N} \tag{2.85}$$

alors l'optimal bond dimension est $D_{op} = D$.

Démonstration

La preuve procède par l'absurde. Si on avait $D_{op} > D$, alors, par définition, D_{op} ne serait pas l'optimal bond dimension. Et si on avait $D_{op} < D$, alors on pourrait écrire

$$|\psi_{\text{odd}}\rangle = \sum_{m=0}^{D_{op}-1} c'_m |\phi'_m\rangle^{\otimes N} \quad (2.86)$$

avec $D_{op} - 1 < (N - 1)/2$. Dans ce cas, l'équation (2.86) serait aussi une représentation de Mandilara *et al.* avec $(N + 1)/2 - D_{op}$ coefficients c'_m nuls. On obtiendrait alors deux représentations de Mandilara *et al.* différentes (2.85) et (2.86). Or, la représentation de Mandilara *et al.* est unique. On en conclut donc que D_{op} ne peut pas être plus petit que D . Ainsi, $D = D_{op}$.

En conclusion, trouver la représentation de Mandilara *et al.* d'un état générique permet immédiatement d'en obtenir l'optimal bond dimension. La réciproque est vrai aussi : trouver la représentation DMPS d'un état générique qui donne l'optimal bond dimension revient à trouver sa représentation de Mandilara *et al.*. Obtenir la représentation de Mandilara *et al.* n'est cependant pas toujours chose aisée. En effet, même avec un ordinateur, le calcul du déterminant (2.78) peut demander beaucoup de temps et de précision. Ainsi, calculer la DMPS d'un état générique pour l'optimal bond dimension pourrait être une méthode plus rapide et plus efficace pour obtenir la forme de Mandilara *et al.*. Il est à noter que, dans le complément d'information [5], les auteurs de l'article donnent une méthode permettant de calculer la DMPS donnant lieu à l'optimal bond dimension. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'implémenter cette méthode lors de ce mémoire.

2.5 Tableau récapitulatif des représentations

Passage de la représentation → à la représentation ↓	Dicke	Majorana	Mandilara <i>et al.</i>	DMPS
Dicke	Équation (2.6)	Équation (2.22)	Équation (2.28)	Équation (2.45)
Majorana	Équations (2.17) (2.18) (2.20)	Équation (2.15)	(—)	(—)
Mandilara <i>et al.</i>	Équations (2.72) à (2.78)	(—)	Équations (2.57) (2.59)	(—)
DMPS	Équation (2.45)	(—)	Équation (2.84)	Équation (2.27)

Dicke	$ \psi_S\rangle = \sum_{k=0}^N d_k D_N^{(k)}\rangle$
Majorana	$ \psi_S\rangle = \mathcal{N} \sum_{\sigma} \phi_{\sigma(1)}\rangle \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(N)}\rangle$ $ \psi_S\rangle \leftrightarrow \{(\theta_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$
Mandilara et al.	<p>N impair : $\psi_{\text{odd}}\rangle = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c_m \phi_m\rangle^{\otimes N}$</p> <p>$N$ pair : $\psi_{\text{even}}\rangle = c_0 \phi_0\rangle^{\otimes N} + c_1 \phi_0^\perp\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=2}^{N/2} c_m \phi_m\rangle^{\otimes N}$</p> <hr/> <p>Forme canonique LOCC : $\psi_{\text{odd}}^{\text{cano LU}}\rangle = \mathcal{N} (0\rangle^{\otimes N} + y_1 \chi_1\rangle^{\otimes N} \sum_{m=2}^{(N-1)/2} y_m e^{il_m} \chi_m\rangle^{\otimes N})$</p> <p>$\psi_{\text{even}}^{\text{cano LU}}\rangle = \mathcal{N} (0\rangle^{\otimes N} + y_1 1\rangle^{\otimes N} \sum_{m=2}^{N/2} y_m e^{il_m} \chi_m\rangle^{\otimes N})$</p> <p>Forme canonique SLOCC : $\psi_{\text{odd}}^{\text{cano ILO}}\rangle = \mathcal{N} (0\rangle^{\otimes N} + 1\rangle^{\otimes N} \sum_{m=2}^{(N-1)/2} \lambda_m e^{il_m} \chi_m\rangle^{\otimes N})$</p> <p>$\psi_{\text{even}}^{\text{cano ILO}}\rangle = \mathcal{N} (0\rangle^{\otimes N} + 1\rangle^{\otimes N} + \lambda c\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=3}^{N/2} \lambda_m e^{il_m} \chi_m\rangle^{\otimes N})$</p>
DMPS	$ \psi_S\rangle = \sum_{m=0}^N c_m \phi_m\rangle^{\otimes N}$ <hr/> <p>Base polygone régulier : $\phi_m\rangle = \cos(\pi/4) 0\rangle + e^{\frac{im2\pi}{(N+1)}} \sin(\pi/4) 1\rangle \quad \forall m = 0, \dots, N$</p> <hr/> <p>Base pyramidale : $\phi_0\rangle = 0\rangle$</p> <p>$\phi_m\rangle = \cos(\pi/4) 0\rangle + e^{\frac{im2\pi}{N}} \sin(\pi/4) 1\rangle \quad \forall m = 1, \dots, N$</p> <hr/> <p>Base bipyramidale : $\phi_0\rangle = 0\rangle$</p> <p>$\phi_1\rangle = 1\rangle$</p> <p>$\phi_m\rangle = \cos(\pi/4) 0\rangle + e^{\frac{im2\pi}{(N-1)}} \sin(\pi/4) 1\rangle \quad \forall m = 2, \dots, N$</p>

Chapitre 3

Illustration des différentes représentations

Ce chapitre présente différents types d'états, que l'on exprime dans les différentes représentations du chapitre précédent. Ce sont les résultats que nous avons obtenus lors de nos recherches, analytiquement ou à partir de codes Mathematica développés tout au long du mémoire.

Les différents types d'états que l'on présente ici sont des états particulièrement importants et intéressants pour le domaine de l'information quantique, parmi lesquels

- **Les états GHZ.** Ces états ont une intrication maximale, et sont souvent utilisés en information quantique, notamment pour la communication et la cryptographie quantique [13].
- **Les états polygones réguliers.** Il s'agit d'une variante du GHZ. De tels états ne sont pas forcément maximalelement intriqués. Ces états sont tous maximalelement fragiles par rapport à la perte d'un qubit, c'est-à-dire que, suite à la perte d'un qubit, l'état n'est plus intriqué, autrement dit, l'état restant est séparable [22].
- **Les états de Dicke.** Ils ont les particularités d'être faciles à produire en laboratoire [32] [33]. Par ailleurs, leur intrication est robuste par rapport à la perte de qubits [34].

Pour chaque type d'états, on commence par les définir dans la base de Dicke avant de construire leur forme dans les autres représentations.

3.1 Etats GHZ à N qubits

3.1.1 Etats GHZ dans la représentation de Dicke

L'état GHZ ou l'état Greenberger–Horne–Zeilinger est un état maximalelement intriqué, dans le sens où la matrice densité réduite à 1 qubit est maximalelement mélangée. Ce genre d'état a été étudié pour la première fois par Greenberger, Horne, Zeilinger en 1989 [12]. Depuis, ils ont déjà été abondamment étudiés [35], mais également été vérifiés expérimentalement [36]. Le GHZ possède également des applications, notamment en communication et cryptographie quantique [13]. Il s'agit d'un état intriqué relativement simple qui peut se définir pour n'importe quel nombre de qubits. On définit le GHZ dans la base de Dicke pour un nombre de qubits arbitraire N

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \frac{|D_N^{(0)}\rangle + |D_N^{(N)}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.1)$$

ou écrit autrement

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \frac{|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} \quad (3.2)$$

On voit ainsi que le GHZ est toujours une superposition où tous les sous-systèmes sont à la fois dans l'état $|0\rangle$ et dans l'état $|1\rangle$.

Montrons que, quel que soit le nombre de qubits N , la matrice densité réduite à un qubit de l'état GHZ est toujours maximalelement mélangée,

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

et donne par conséquent lieu à une entropie d'intrication $S(|\text{GHZ}_N\rangle) = -\text{Tr}(\rho_1 \log_2 \rho_1)$ maximale.

Démonstration

Soit l'opérateur densité correspondant à l'état GHZ,

$$\begin{aligned} \rho &= |\text{GHZ}\rangle\langle\text{GHZ}| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|^{\otimes N} + \langle 1|^{\otimes N}) \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N} + \frac{1}{2}|0\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N} + \frac{1}{2}|1\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N} + \frac{1}{2}|1\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N} \end{aligned} \quad (3.4)$$

La représentation matricielle de ρ dans la base de Dicke est la matrice $(N+1) \times (N+1)$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Sa matrice densité réduite à $N-1$ qubits est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_{1,\dots,N-1} &= \langle 0|\rho|0\rangle + \langle 1|\rho|1\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle 0||0\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N}|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 1||1\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N}|1\rangle \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle^{\otimes N-1}\langle 0|^{\otimes N-1} + \frac{1}{2}|1\rangle^{\otimes N-1}\langle 1|^{\otimes N-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La représentation matricielle dans la base de Dicke de $\rho_{1,\dots,N-1}$ est la matrice $N \times N$

$$\rho_{1,\dots,N-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

On calcule alors la matrice densité réduite à $N - 2$ qubits

$$\begin{aligned}
\rho_{1,\dots,N-2} &= \langle 0|\rho_{1,\dots,N-1}|0\rangle + \langle 1|\rho_{1,\dots,N-1}|1\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle 0|0\rangle^{\otimes N-1}\langle 0|0\rangle^{\otimes N-1} + \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle^{\otimes N-1}\langle 1|1\rangle^{\otimes N-1} \\
&= \frac{1}{2}|0\rangle^{\otimes N-2}\langle 0|0\rangle^{\otimes N-2} + \frac{1}{2}|1\rangle^{\otimes N-2}\langle 1|1\rangle^{\otimes N-2}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Représentée dans la base de Dicke par la matrice de dimension $(N - 1) \times (N - 1)$

$$\rho_{1,\dots,N-2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Les matrices (3.7) et (3.9) ont la même forme, c'est-à-dire que tous leurs éléments sont nuls à l'exception de l'élément sur la première ligne et première colonne et l'élément sur la dernière ligne et dernière colonne. Ainsi, il est clair, vu l'expression (3.8), que si l'on effectue j fois le même procédé, on obtient alors la matrice densité réduite à $N - j$ qubits, qui est encore une fois de la même forme que (3.7) et (3.9). En particulier, si on calcule la matrice densité réduite à un qubit, on obtient donc bien la matrice (3.3). Ce raisonnement est valable pour tout N , on a donc bien prouvé que, pour tout N , l'état GHZ est bien un état maximalelement intriqué vis-à-vis de l'entropie d'intrication.

3.1.2 Etats GHZ dans la représentation de Majorana

On a que pour un nombre de qubits arbitraire N l'état du GHZ en représentation de Majorana est

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \mathcal{N} \sum_{\sigma} |\phi_{\sigma(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_{\sigma(N)}\rangle \tag{3.10}$$

avec

$$|\phi_m\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i(2m\pi)/N} \sin(\pi/4)|1\rangle \quad \forall N \text{ impair} \tag{3.11}$$

$$|\phi_m\rangle = \cos(\pi/4)|0\rangle + e^{i((2m-1)\pi)/N} \sin(\pi/4)|1\rangle \quad \forall N \text{ pair} \tag{3.12}$$

Sur la sphère de Bloch, les points qui caractérisent le GHZ sont toujours aux sommets d'un polygone régulier, dans le plan de l'équateur. Par exemple, pour le GHZ à 3 qubits, il s'agit d'un triangle équilatéral. Pour le cas où N est impair, alors un des points est toujours situé en $(\pi/2, 0)$. Dans le cas pair, deux points sont toujours situés à égale distance sur l'équateur du point $(\pi/2, 0)$ voir la Figure 3.1.

Montrons que le GHZ correspond toujours en représentation de Majorana à un polygone régulier.

Démonstration

En effet, le polynôme de Majorana (2.11) pour un nombre N quelconque de qubits est

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(-z)^N}{\sqrt{2}} \tag{3.13}$$

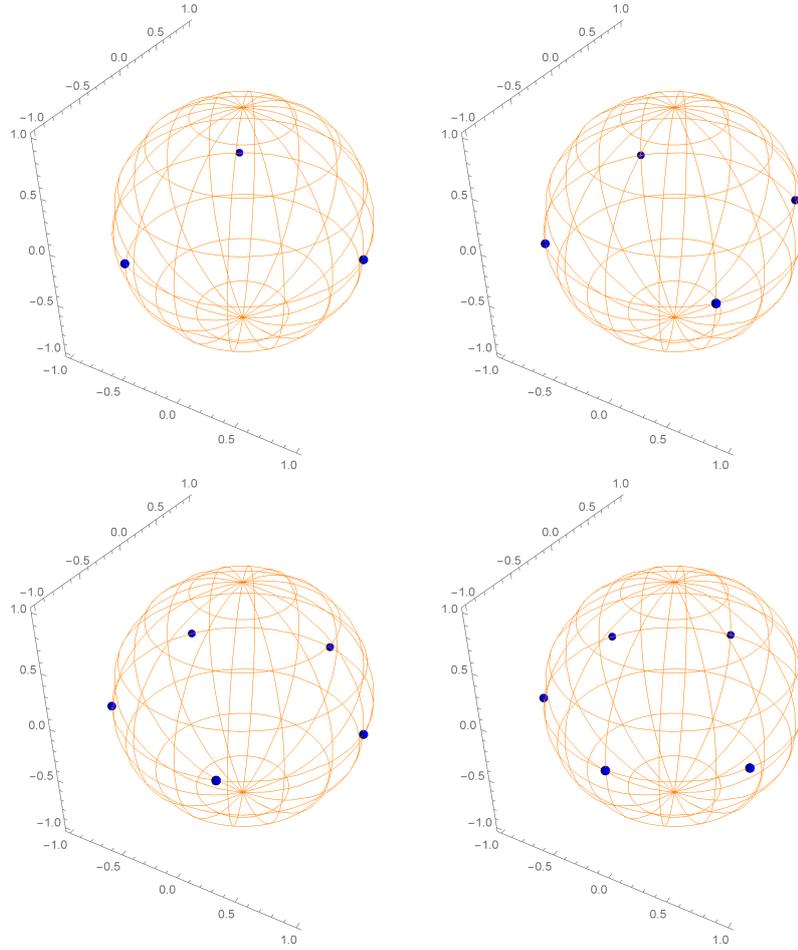


FIGURE 3.1 – Représentation de Majorana sur la sphère de Bloch, pour respectivement 3, 4, 5 et 6 qubits. Dans le cas à 3 qubits, les points forment les sommets d'un triangle équilatéral ; pour 4 qubits, aux sommets d'un carré ; pour 5 qubits, aux sommets d'un pentagone régulier et pour 6 qubits, aux sommets d'un hexagone régulier.

L'équation permettant de calculer les racines d'un tel polynôme est donc

$$(-z)^N = -1 \quad (3.14)$$

Cette équation donne toujours N solutions situées dans le plan complexe.

Les solutions pour le cas impair :

$$z_j = e^{i\frac{2\pi}{N}j} \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Les solutions pour le cas pair :

$$z_j = e^{i\frac{(2j-1)\pi}{N}} \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

Ainsi, en calculant les angles pour la représentation de Majorana on obtient bien que les points sur la sphère de Bloch sont toujours dans le plan de l'équateur ($\theta_j = \pi/2 \forall j = 1, \dots, N$) et aux sommets d'un polygone régulier ($\phi_j = 2\pi j/N \forall j = 1, \dots, N$, pour le cas impair et $\phi_j = (2j-1)\pi/N \forall j = 1, \dots, N$ pour le cas pair).

3.1.3 Etats GHZ dans la représentation de Mandilara *et al.*

Dans cette représentation il faut décomposer le GHZ, comme l'équation (2.57) ou (2.59) suivant la parité de N . Néanmoins, le GHZ exprimé dans la base de Dicke (3.2) est déjà sous la forme (2.57)/(2.59). En effet, l'équation (3.2) est bien une somme d'états $|\phi\rangle^{\otimes N}$. Le GHZ dans la représentation de Mandilara *et al.* est la même que dans la représentation de Dicke :

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} c_m |\phi\rangle^{\otimes N} = \frac{|0\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} \quad \text{Si } N \text{ est impair :} \quad (3.17)$$

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \sum_{m=0}^{N/2} c_m |\phi\rangle^{\otimes N} = \frac{|0\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} \quad \text{Si } N \text{ est pair :} \quad (3.18)$$

Ainsi, les c_m sont tous nuls à l'exception de c_0 et c_1 qui valent chacun $\frac{1}{\sqrt{2}}$, les angles θ_1 et φ_1 valent 0, alors que le couple d'angles θ_1 et φ_1 vaut $(\pi, 0)$.

Forme canonique LOCC :

Cherchons maintenant la forme canonique LOCC pour le GHZ. Encore une fois, on va voir que la forme canonique du GHZ est le GHZ lui-même. En effet, en appliquant l'algorithme permettant de calculer la forme canonique LOCC sur le GHZ, on obtient comme solution le GHZ, et ce, pour n'importe quel nombre de qubits. On peut se rendre compte de cela sans passer par la simulation numérique.

On remarque d'abord que l'équation (3.2) est aussi de la forme de Mandilara *et al.* arrangée (2.60)/(2.61). Avec cette fois-ci tous les y_i nuls à l'exception d'un seul y_i qui vaut 1, et $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. A bien y regarder, on se rend compte que le GHZ est même dans la forme canonique, dans le cas où tous les y_m sont nuls à l'exception de y_1 qui est égal à 1. Comme la forme canonique est unique, on a bien montré que les états GHZ sont la forme canonique de leur classe LOCC.

Forme canonique SLOCC :

Le GHZ est également sa propre forme canonique pour le cas SLOCC. On peut faire exactement le même raisonnement que pour la forme canonique LOCC. Encore une fois, vu l'unicité de la forme canonique SLOCC, on a bien que le GHZ est sa propre forme canonique SLOCC, avec tous les coefficients $\lambda_m = 0$ (le coefficient λ est également nul dans le cas pair).

3.1.4 Etats GHZ dans la représentation DMPS

On décompose ici le GHZ dans différentes représentations DMPS définies dans le chapitre précédent.

Décomposition du GHZ dans la base polygone régulier

Le GHZ dans la représentation de Majorana est un polygone régulier situé dans le plan de l'équateur. Or, la base polygone régulier est également représentée sur la sphère de Bloch comme un polygone régulier. Néanmoins, contrairement à ce que l'on pourrait croire, le polygone régulier formé

par la représentation de Majorana du GHZ et celui qui représente les états de la base polygone régulier ne sont pas les mêmes. En effet, pour le GHZ à N qubits, le polygone régulier qu'il forme dans la représentation de Majorana sera un polygone à N côtés, alors que la base polygone régulier à N qubits forme sur la sphère de Bloch un polygone à $N + 1$ côtés.

Pour le GHZ à 3 qubits, on trouve la décomposition suivante :

$$|\text{GHZ}_3\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)|\phi_0\rangle^{\otimes 3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + |\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.19)$$

où les $|\phi_j\rangle$ sont définis à l'équation (2.46) pour $N = 3$.

On a également essayé pour 4 et 5 qubits, néanmoins, les expressions deviennent rapidement trop longues et peu dignes d'intérêt.

Décomposition du GHZ dans la base pyramidale

La décomposition du GHZ dans cette base est particulièrement intéressante. En effet, comme montré sur la Figure 3.2, on va décomposer le GHZ en des états qui représentent chacun un point du GHZ dans la représentation de Majorana (en plus de l'état $|0\rangle$, représentant le point qui est au pôle nord). On obtient pour le GHZ à 3 qubits la décomposition suivante :

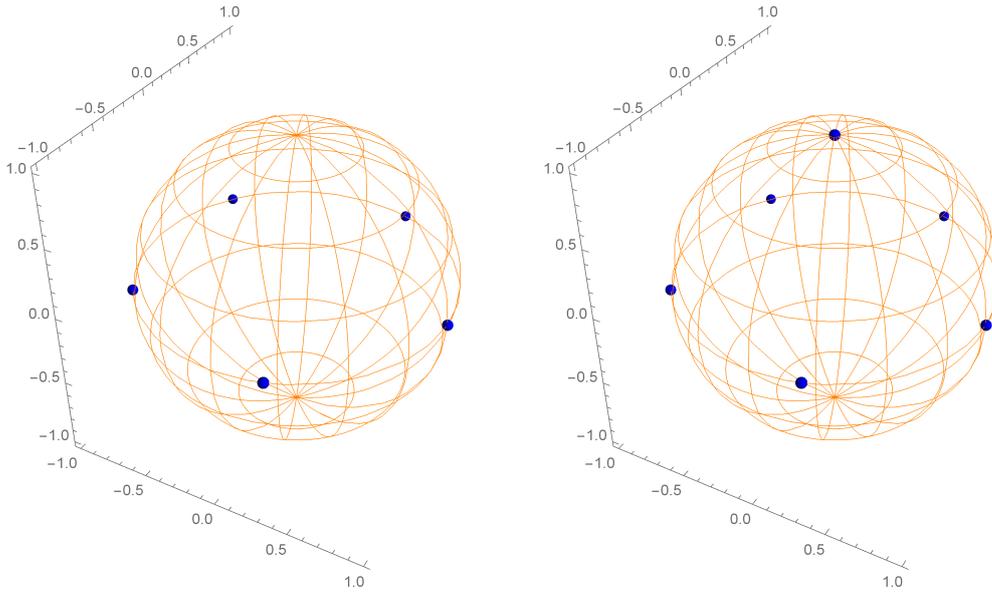


FIGURE 3.2 – A gauche, la représentation de Majorana du GHZ à 5 qubits. A droite, Les points définissant les états de la base pyramidale pour $N = 5$.

$$|\text{GHZ}_3\rangle = \frac{2}{3}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} + \frac{2}{3}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{2}{3}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.20)$$

Les $|\phi_j\rangle$ sont définis dans l'équation (2.49). On remarque que tous les coefficients pour les états qui représentent un point de la représentation de Majorana du GHZ sont tous égaux et valent : $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors que le coefficient $c_0 = 0$. On voit ici, toute la bizarrerie de travailler dans des bases non-orthonormées. En effet, le GHZ n'a aucune contribution en le vecteur $|\phi_0\rangle^{\otimes 3} = |0\rangle^{\otimes 3}$, alors que ce

vecteur apparait dans l'expression du GHZ (3.2). On pourrait croire que les coefficients $c_{m \neq 0}$ sont égaux parce que l'on décompose un état dont sa représentation de Majorana est un ensemble de points dans le plan de l'équateur (qui est le plan du polygone régulier formé par les vecteurs de la base). Il n'en est rien. Nous avons essayer de décomposer d'autres états dont la représentation de Majorana est un ensemble de points dans le plan de l'équateur, voir Figure 3.3, les coefficients $c_{m \neq 0}$ ne sont pas du tout égaux, d'ailleurs c_0 n'est même pas nul.

On trouve la décomposition pour le GHZ à 5 qubits :

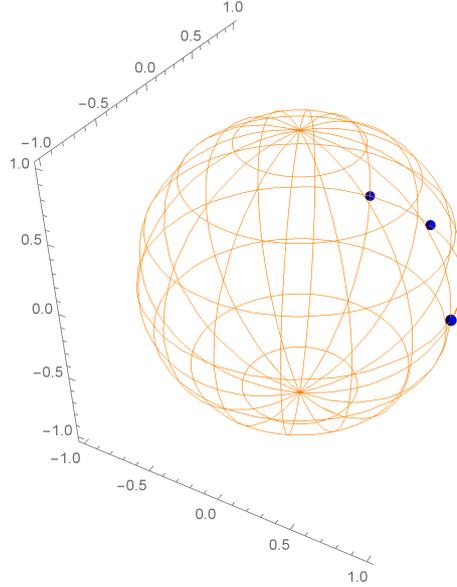


FIGURE 3.3 – Représentation de Majorana d'un état $|\psi\rangle$ à 3 qubits caractérisé par les angles $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \phi/2$ et $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/3$ et $\varphi_3 = \pi/4$. Dans la base polygone régulier, il s'écrit comme $|\psi\rangle = \frac{(6-3i)+(3-2i)\sqrt{3}}{6\sqrt{7+\sqrt{3}}}|\phi_0\rangle^{\otimes 3} + \frac{3+2i\sqrt{3}}{6\sqrt{7+\sqrt{3}}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{7+\sqrt{3}}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{(6+3i)-(5-4i)\sqrt{3}}{6\sqrt{7+\sqrt{3}}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3}$. Dans cette base aucun coefficient c_m n'est égal égaux et c_0 est non nul.

$$|\text{GHZ}_5\rangle = \frac{4}{5}|\phi_1\rangle^{\otimes 5} + \frac{4}{5}|\phi_2\rangle^{\otimes 5} + \frac{4}{5}|\phi_3\rangle^{\otimes 5} + \frac{4}{5}|\phi_4\rangle^{\otimes 5} + \frac{4}{5}|\phi_5\rangle^{\otimes 5} \quad (3.21)$$

On voit que l'expression pour 5 qubits est similaire à celle à 3 qubits. Pour $N = 7$, on obtient, toujours à l'aide du code Mathematica, encore une expression semblable

$$|\text{GHZ}_7\rangle = \frac{8}{7}|\phi_1\rangle^{\otimes 7} + \frac{8}{7}|\phi_2\rangle^{\otimes 7} + \frac{8}{7}|\phi_3\rangle^{\otimes 7} + \frac{8}{7}|\phi_4\rangle^{\otimes 7} + \frac{8}{7}|\phi_5\rangle^{\otimes 7} + \frac{8}{7}|\phi_6\rangle^{\otimes 7} + \frac{8}{7}|\phi_7\rangle^{\otimes 7} \quad (3.22)$$

Une formule générale pour la décomposition du GHZ à N qubits, avec N impair, semble se dégager :

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \sum_{m=1}^N \frac{2^{(N-1)/2}}{N} |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (3.23)$$

Il faut vérifier que cette formule intuitionnée est bien la solution du système (2.51). Si c'est bien le cas, la formule intuitionnée est alors correcte. La formule intuitionnée suppose les c_m comme suit

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_m = \frac{2^{(N-1)/2}}{N} \end{cases} \quad \forall m = 1, \dots, N \quad (3.24)$$

En remplaçant ces coefficients dans (2.51), on a bien que $d_0 = d_N = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $d_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N - 1$ ¹.

Intuitivement, on pourrait croire que le comportement est différent pour un nombre pair de qubits. En effet, dans le cas d'un nombre pair de qubits, les polygones que forme la base de la pyramide et le GHZ ne sont plus exactement les mêmes. En réalité, le polygone formé par le GHZ est une rotation du polygone formé par la base de la pyramide, voir Figure 3.4.

La formule (3.23) reste néanmoins valable. En effet, on a démontré que cette formule intuitée satisfait

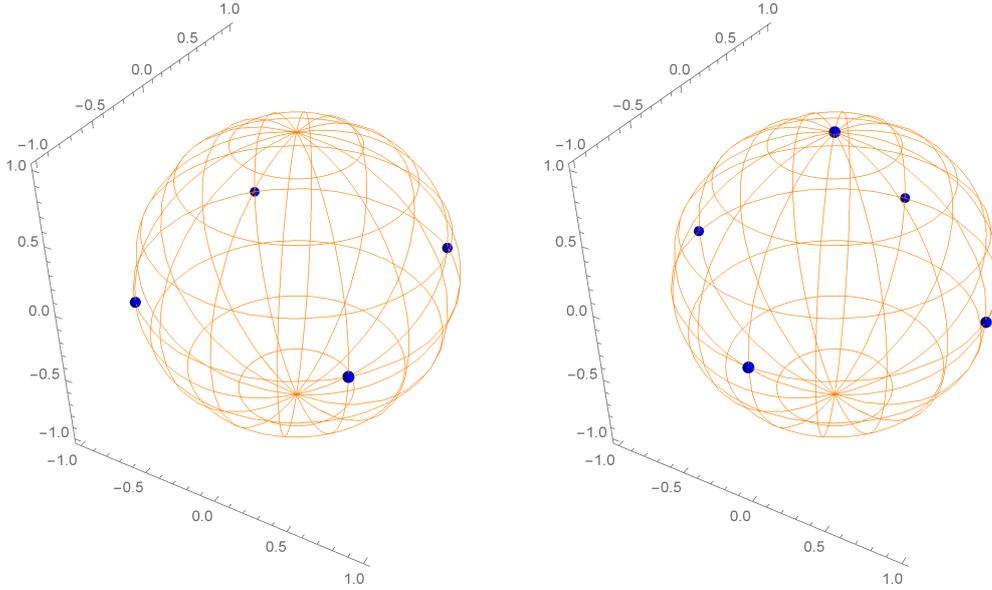


FIGURE 3.4 – A gauche, la représentation de Majorana du GHZ à 4 qubits. A droite, la base pyramidale pour un état à 4 qubits. On voit que la base de la pyramide est une rotation du GHZ.

bien le système d'équations (2.51), pour tout N . La décomposition du GHZ à 4 qubits donne :

$$|\text{GHZ}_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.25)$$

Or, (3.23) pour $N = 4$ redonne (3.25). On a donc démontré la forme du GHZ pour n'importe quel nombre de qubits dans la base pyramidale : (3.23). On insiste encore une fois que dans cette base tous les coefficients c_m sont identiques à l'exception de c_0 qui est nul.

Décomposition du GHZ dans la base bipyramidale

Cette décomposition est assez immédiate. On va décomposer le GHZ dans une base qui constitue à la fois un polygone régulier (avec un côté en moins que le GHZ, voir Figure 3.5) et un point situé à chacun des pôles. Or, on sait que le pôle nord représente le vecteur $|0\rangle$ et le pôle sud le vecteur $|1\rangle$. Comme le GHZ est une superposition d'état $|0\rangle^{\otimes N}$ et $|1\rangle^{\otimes N}$, on a

$$|\text{GHZ}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_0\rangle^{\otimes N} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle^{\otimes N} \quad (3.26)$$

1. Dans le calcul de ces coefficients, on doit calculer la somme $\sum_{m=1}^N e^{i\frac{2\pi m}{N}k}$ qui est toujours nulle.

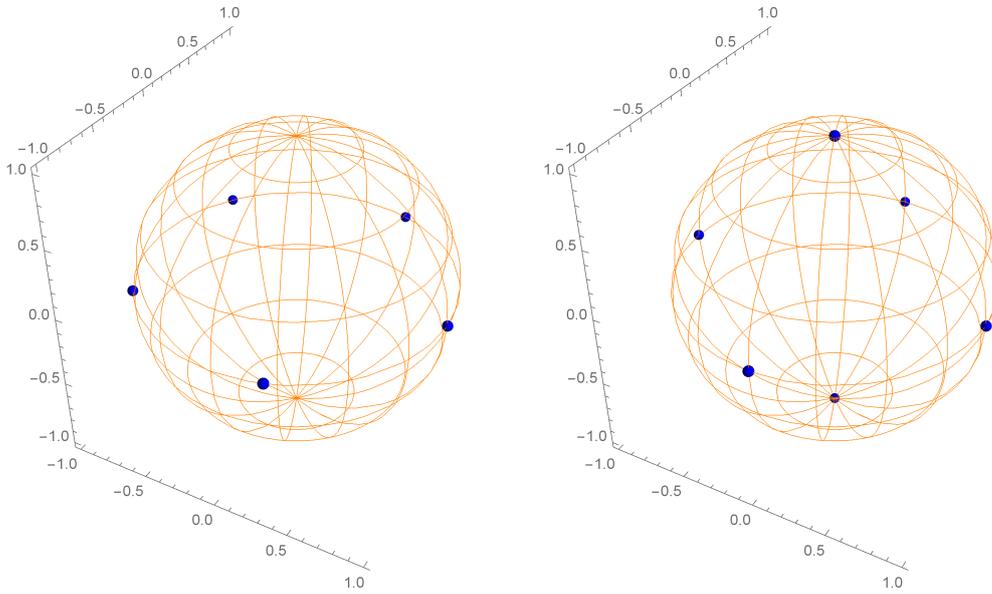


FIGURE 3.5 – A gauche, la représentation de Majorana du GHZ à 5 qubits. A droite, la base bipyramidale pour un état à 5 qubits.

3.1.5 Tableau récapitulatif des représentations du GHZ

Ce tableau récapitule les différentes expressions du GHZ dans les différentes représentations. Il est à noter que pour la représentation de Majorana, ce n'est pas directement l'expression de l'état (2.11) qui sera donnée, mais bien les angles qui caractérisent les points sur la sphère de Bloch (2.15).

Dicke	$ \text{GHZ}_N\rangle = \frac{ D_N^{(0)}\rangle + D_N^{(N)}\rangle}{\sqrt{2}}$
Majorana	<p>N impair : $\{(\theta_j, \varphi_j) = (\frac{\pi}{2}, 2j\pi), j = 1, \dots, N\}$</p> <p>N pair : $\{(\theta_j, \varphi_j) = (\frac{\pi}{2}, (2j - 1)\frac{\pi}{N}), j = 1, \dots, N\}$</p>
Mandilara et al.	$ \text{GHZ}_N\rangle = \frac{ 0\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} + \frac{ 1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}$
	<p>Forme canonique LOCC : $\text{GHZ}_N^{\text{cano LU}}\rangle = \frac{ 0\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} + \frac{ 1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}$</p> <p>Forme canonique SLOCC : $\text{GHZ}_N^{\text{cano ILO}}\rangle = \frac{ 0\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} + \frac{ 1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}$</p>
DMPS	<p>Base polygone régulier : $\text{GHZ}_3\rangle = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) \phi_0\rangle^{\otimes 3} + (\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \phi_2\rangle^{\otimes 3} + \phi_3\rangle^{\otimes 3}$ (Pour $N = 3$) Bond dimension : $D = 3$</p>
	<p>Base pyramidale : $\text{GHZ}_N\rangle = \sum_{m=1}^N \frac{2^{(N-1)/2}}{N} \phi_m\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = N + 1$</p>
	<p>Base bipyramidale : $\text{GHZ}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_0\rangle^{\otimes N} + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = 2 \rightarrow$ optimale</p>

3.2 Etats polygones

3.2.1 Etats polygones réguliers dans la représentation de Dicke

Les états polygones réguliers sont une variante du GHZ², dans le sens où, comme pour le GHZ, seuls les coefficients d_0 et d_N du développement dans la base de Dicke sont non nuls. Cependant, contrairement aux états de Greenberger–Horne–Zeilinger, ces deux coefficients ne sont pas nécessairement égaux. Ainsi, la forme générale d'un état polygone régulier à N qubits est :

$$|\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_N|^2}} (d_0 |D_N^{(0)}\rangle + d_N |D_N^{(N)}\rangle) \quad (3.27)$$

Contrairement au GHZ, ces états ne sont, en général, pas maximalelement intriqués. Des tests sur mathematica ont permis de trouver la forme générale de la matrice densité réduite à un qubit d'un état (3.27)

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{d_0 d_0^*}{|d_0|^2 + |d_1|^2} & 0 \\ 0 & \frac{d_1 d_1^*}{|d_0|^2 + |d_1|^2} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Ce qui ne donne, en général, pas une entropie d'intrication maximale.

3.2.2 Etats polygones dans la représentation de Majorana

Le polynôme de Majorana pour un état polygone arbitraire quelconque (3.27) est

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_N|^2}} (d_0 + d_N (-z)^N) \quad (3.29)$$

et l'équation permettant de trouver les racines de Majorana, $P(z) = 0$, s'écrit

$$(-z)^N = \frac{-d_0}{d_N} \quad (3.30)$$

Les solutions de cette équation sont donc

$$z_j = \left(\frac{|d_0|}{|d_n|}\right)^{1/N} e^{i \frac{2\pi}{N} j} \quad \text{Pour } N \text{ impair} \quad (3.31)$$

$$z_j = \left(\frac{|d_0|}{|d_n|}\right)^{1/N} e^{i \frac{(2j-1)\pi}{N}} \quad \text{Pour } N \text{ pair} \quad (3.32)$$

Ces solutions sont identiques à celles du GHZ à un préfacteur $\left(\frac{|d_0|}{|d_n|}\right)^{1/N}$ près. La représentation sur la sphère de Bloch, illustrée à la Figure 3.6, montre différents états polygones réguliers. Le nom état polygone provient, en fait, de leur représentation de Majorana. En effet, les solutions (3.32) nous renseignent que la représentation de Majorana de tels états donnera toujours un polygone régulier dans un plan parallèle à l'équateur. Tous les points de Majorana, pour un état polygone régulier, sont caractérisés par un même angle θ . Cet angle est celui que fait le plan formé par le polygone régulier avec la verticale. En toute généralité cet angle θ vaut, pour un état polygone régulier,

$$\theta_j = 2 \operatorname{arccot} \left| \left(\frac{d_0}{d_n}\right)^{1/N} \right| \quad (3.33)$$

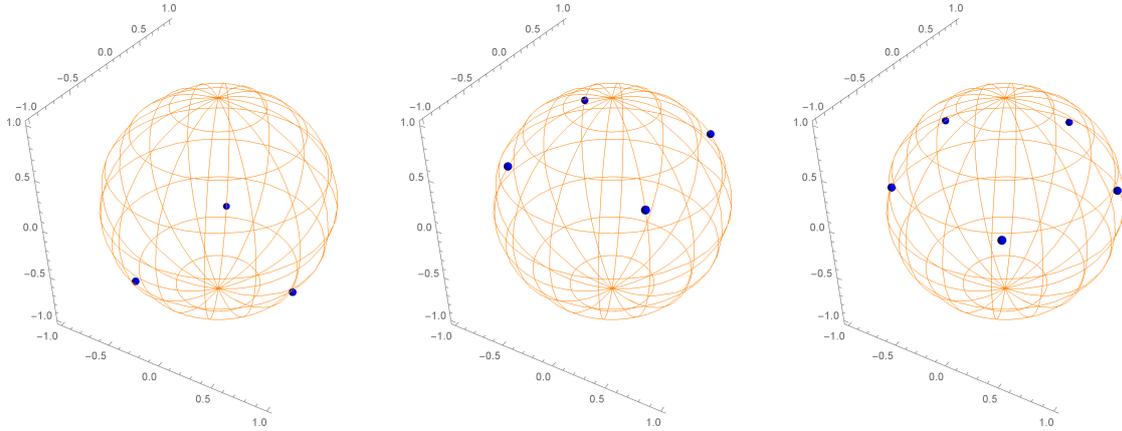


FIGURE 3.6 – Représentation de Majorana de différents états polygones à 3,4 et 5 qubits. L’expression de l’état à 3 qubits est $|\psi_{polygone}\rangle = \mathcal{N}(|D_3^{(0)}\rangle + (12 + 5i)|D_3^{(3)}\rangle)$, de celui à 4 qubits $|\psi_{polygone}\rangle = \mathcal{N}((10 + 10i)|D_3^{(0)}\rangle + (1 + i)|D_3^{(3)}\rangle)$, celui à 5 qubits $|\psi_{polygone}\rangle = \mathcal{N}(8|D_3^{(0)}\rangle + (1 + i)|D_3^{(3)}\rangle)$ avec \mathcal{N} un facteur de normalisation.

Un état polygone régulier forme un polygone dans le plan de l’équateur uniquement si $|d_0| = |d_N|$. En effet, on sait, grâce aux transformations de Möbius, que si l’on multiplie uniquement par une phase alors les points effectuent une rotation (il reste dans le plan de l’équateur). Si on multiplie maintenant par un réel, on va avoir une dilatation des points ce qui signifie que le polygone va se trouver dans un plan parallèle à l’équateur. Si la différence $|d_0| - |d_N|$ est positive alors le polygone se forme dans la partie supérieure de la sphère. Plus cette différence est grande, plus le polygone est dans un plan proche du pôle nord. Et, évidemment, au plus cette différence est négative au plus la figure géométrique est dans un plan proche du pôle sud.

3.2.3 États polygones réguliers dans la représentation de Mandilara *et al.*

Tout comme le GHZ, les états polygones réguliers sont déjà de Mandilara *et al.* (2.57)/(2.59), avec tous les coefficients c_m nuls, à l’exception de c_0 et c_1 . Ainsi, la forme dans la représentation de Mandilara *et al.* d’un état polygone régulier est la même que celle dans la représentation de Dicke

$$|\psi_{polygone}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_1|^2}}(c_0|0\rangle^{\otimes N} + c_1|1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.34)$$

où les c_0 et c_1 sont respectivement égaux aux coefficients d_0 et d_N de l’équation (3.27).

La Figure 3.7 montre qu’un état qui forme un polygone régulier (mais pas nécessairement dans un plan parallèle à l’équateur) peut toujours par rotation se ramener à un état polygone régulier. Ceci est pratique, car, l’expression dans la base de Dicke d’un état formant un polygone régulier dans un plan non parallèle à l’équateur est bien plus compliquée. Ainsi, il est plus facile d’étudier de tels états une fois ramenés à un état polygone régulier.

1) La forme canonique LOCC :

2. Dans la littérature [26] ces états sont parfois appelés états type-GHZ.

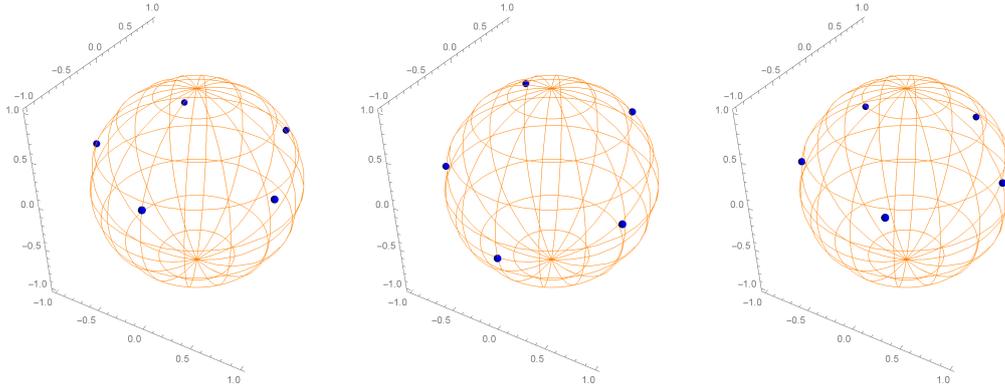


FIGURE 3.7 – A gauche, un état polygone régulier à 5 qubits $|\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{5i}{\sqrt{26}}|D_N^{(0)}\rangle + \frac{1}{\sqrt{26}}|D_N^{(N)}\rangle$. Au centre, le même état après avoir effectué une rotation d'un angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe x , c'est-à-dire après avoir appliqué une transformation unitaire. A droite, la forme canonique LOCC de l'état polygone régulier $|\psi_{\text{polygone}}\rangle : |\psi_{\text{polygone}}^{\text{cano}}\rangle = 5|D_N^{(0)}\rangle + |D_N^{(N)}\rangle$

Nous avons d'abord recherché la forme canonique pour un état polygone régulier à trois qubits, un tel état est appelé état triangle équilatéral $|\psi_{\Delta}\rangle$

$$|\psi_{\Delta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_3|^2}}(c_0|0\rangle^{\otimes N} + c_3|1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.35)$$

La première étape a été d'appliquer le code à certains états triangles équilatéraux pour obtenir la forme canonique, voici quelques exemples :

Etat triangle équilatéral 1 :

$$|\psi_{\Delta}\rangle = \mathcal{N}((i+1)|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.36)$$

Forme canonique 1

$$|\psi_{\Delta}^{\text{cano}}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle^{\otimes N} + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle^{\otimes N} \quad (3.37)$$

Etat triangle équilatéral 2 :

$$|\psi_{\Delta}\rangle = \mathcal{N}(i|0\rangle^{\otimes N} + (1+5i)|1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.38)$$

Forme canonique 2

$$|\psi_{\Delta}^{\text{cano}}\rangle = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}|0\rangle^{\otimes N} + \frac{1}{3\sqrt{3}}|1\rangle^{\otimes N} \quad (3.39)$$

Après quelques tests, on a pu intuiter une formule générale pour tous les états triangles équilatéraux (3.34)

$$|\psi_{\Delta}^{\text{cano}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2}}(|c_{>}|0\rangle^{\otimes 3} + |c_{<}|1\rangle^{\otimes 3}) \quad (3.40)$$

avec $|d_{>}| = \sup\{|c_0|, |c_1|\}$ et $|d_{<}| = \min\{|c_0|, |c_1|\}$. Il faut maintenant prouver que la formule intuitée (3.40) est bien la forme canonique de (3.34). Pour cela, deux choses sont à prouver. Premièrement, que l'état (3.40) est bien la forme canonique, c'est-à-dire qu'il a bien la même forme que (2.62).

Ensuite, que ces deux états sont reliés par une transformation $SU(2)$, et donc qu'ils appartiennent bien à la même classe LOCC. On effectue ici la démonstration pour 3 qubits, mais elle se généralise pour un nombre arbitraire N de qubits.

Démonstration

1) Montrons que (3.40) est bien sous forme canonique.

Pour rappel, la forme canonique à 3 qubits est donnée par :

$$|\psi_{odd}\rangle = \mathcal{N}(|0\rangle^{\otimes N} + y_1|\chi_1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.41)$$

avec y_1 réel et \mathcal{N} un facteur de normalisation. Vu la définition des vecteurs de la base de Dicke, on peut remarquer que l'équation (3.40) est déjà dans la représentation de Mandilara *et al.* non arrangée (2.57). En effet

$$|\psi_{\Delta}^{cano}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2)}} (|c_{>}| |0\rangle^{\otimes 3} + |c_{<}| |1\rangle^{\otimes 3}) \quad (3.42)$$

Il s'agit bien de la forme de Mandilara *et al.* non arrangée où les coefficients c_0 et c_1 de l'équation (2.57) sont respectivement $\frac{|c_{>}|}{\sqrt{(|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2)}}$ et $\frac{|c_{<}|}{\sqrt{(|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2)}}$ et avec $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ et $\theta_1 = \pi$, $\varphi_1 = 0$.

En factorisant, on peut obtenir la représentation de Mandilara *et al.* réarrangée (2.60)

$$|\psi_{\Delta}^{cano}\rangle = \frac{|c_{>}|}{\sqrt{(|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2)}} (|0\rangle^{\otimes 3} + \frac{|c_{<}|}{|c_{>}|} |1\rangle^{\otimes 3}) \quad (3.43)$$

Cette équation n'est pas seulement de la forme de Mandilara *et al.* réarrangée mais également de la forme canonique (3.41), avec $y_1 = \frac{|c_{<}|}{|c_{>}|}$ et $\theta_1 = \pi$, $\varphi_1 = 0$. Ainsi, par unicité de la forme canonique, on a bien que $|\psi_{\Delta}^{cano}\rangle$ est la forme canonique. On remarque que ceci reste vrai pour les états polygones réguliers à N qubits. Dans ce cas, l'équation (3.40) devient

$$|\psi_{polygone}^{cano}\rangle = \frac{|c_{>}|}{\sqrt{(|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2)}} (|0\rangle^{\otimes N} + \frac{|c_{<}|}{|c_{>}|} |1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.44)$$

Il reste à prouver que $|\psi_{\Delta}^{cano}\rangle$ et $|\psi_{\Delta}\rangle$ de l'équation (3.35) sont bien liés par une transformation unitaire.

2) Montrons que $|\psi_{\Delta}^{cano}\rangle$ et $|\psi_{\Delta}\rangle$ sont reliés par une transformation unitaire locale.

Pour démontrer cela, il suffit de construire une matrice unitaire qui va transformer $|\psi_{\Delta}\rangle$ en $|\psi_{\Delta}^{cano}\rangle$. Un petit lemme est nécessaire à la construction de cette matrice :

Lemme :

Pour tout vecteur $|\psi_s\rangle = \sum_{k=0}^N d_k |D_N^{(k)}\rangle$, il existe une transformation unitaire U qui transforme $|\psi_s\rangle$ en $|\psi'_s\rangle = U|\psi_s\rangle = \sum_{k=0}^N d'_k |D_N^{(k)}\rangle$ tel que d'_i et d'_j ($i \neq j$) ont la même phase et $|d'_k| = |d_k|$, $\forall k \neq i, j$. La matrice U qui permet une telle transformation est, dans la base computationnelle $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, de la forme

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Ainsi, en jouant sur la phase globale, on peut rendre d'_i et d'_j réels et positifs.

On peut maintenant construire la matrice unitaire qui transforme (3.27) à 3 qubits en (3.40). Dans le cas où $|c_0| > |c_3|$, on choisit la phase dans (3.45) comme $\alpha = \frac{1}{3}(\text{Arg}(c_3) - \text{Arg}(c_0))$ de sorte que la matrice $U^{\otimes 3}$ est donnée, dans la base de Dicke, par

$$U^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} e^{i(\text{Arg}(c_3) - \text{Arg}(c_0))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i}{3}(\text{Arg}(c_3) - \text{Arg}(c_0))} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{3}(\text{Arg}(c_3) - \text{Arg}(c_0))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

En multipliant $|\psi_\Delta\rangle$ par $U^{\otimes 3}$ et par un facteur de phase globale $e^{-i\text{Arg}(c_3)}$, on obtient

$$|\psi_\Delta^{\text{cano}}\rangle = e^{-i\text{Arg}(c_3)} U |\psi_\Delta\rangle \quad (3.47)$$

Pour le cas où $|c_3| \geq |c_0|$, il faut choisir la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{i}{3}(\text{Arg}(c_0) - \text{Arg}(c_3))} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

de sorte que $U^{\otimes 3}$ est donnée par

$$U^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i(\text{Arg}(c_0) - \text{Arg}(c_3))} \\ 0 & 0 & e^{\frac{2i}{3}(\text{Arg}(c_0) - \text{Arg}(c_3))} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{3}(\text{Arg}(c_0) - \text{Arg}(c_3))} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

En multipliant $|\psi_\Delta\rangle$ par $U^{\otimes 3}$ et un facteur de phase globale $e^{-i\text{Arg}(c_0)}$, on obtient $e^{-i\text{Arg}(c_0)} U |\psi_\Delta\rangle = |\psi_\Delta^{\text{cano}}\rangle$. Au final, nous avons démontré que $|\psi_{\Delta\text{cano}}\rangle$ est la forme canonique pour des états triangles équilatéraux.

La formule (3.40) peut en fait être généralisée pour n'importe quel nombre N de qubits

$$|\psi_{\text{polygone}}^{\text{cano}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(|c_{>}|^2 + |c_{<}|^2)}} (|c_{>}| |0\rangle^{\otimes N} + |c_{<}| |1\rangle^{\otimes N}) \quad (3.50)$$

La preuve est identique sauf que la matrice U doit être choisie comme suit

$$U = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{N}(\text{Arg}(c_N) - \text{Arg}(c_0))} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Ainsi, s'achève la preuve de la forme canonique (3.50) pour tous les états polygones réguliers, quel que soit N .

2) La forme canonique SLOCC

En effectuant plusieurs tests sur différents états polygones réguliers à un nombre de qubits différent, on a pu se rendre compte que la forme canonique SLOCC d'un état polygone régulier à N qubits est le GHZ à N qubits. Ceci ne semble pas particulièrement surprenant puisque le GHZ est lui

aussi un état polygone régulier. Il est possible de démontrer que le GHZ est bien la forme canonique SLOCC des états polygones réguliers.

Démonstration

Il faut prouver que le GHZ est bien la forme canonique SLOCC de tous les états polygones réguliers de la forme (3.27). La preuve se fait en deux étapes. Premièrement, il faut montrer que le GHZ est bien de forme canonique (2.64)/(2.65). Cette démonstration a déjà été effectuée dans la section précédente. Deuxièmement, il faut prouver que l'état (3.27) et le GHZ sont SLOCC-équivalents. Cela revient à dire qu'il doit exister une transformation de Möbius qui transforme les racines de Majorana de (3.27) en les racines de Majorana de l'état GHZ³. Or, cela a déjà été démontré plus haut, les racines du GHZ (3.14) et de l'état polygone régulier (3.30) diffèrent toutes d'un facteur $(\frac{|d_0|}{|d_N|})^{1/N}$. Ainsi, la transformation de Möbius correspondante est la transformation avec $a = (\frac{|d_0|}{|d_N|})^{1/N}$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$

$$f(z) = \left(\frac{|d_0|}{|d_N|}\right)^{1/N} z \quad (3.52)$$

La transformation de Möbius (3.52), ou la transformation $SL(2, \mathbb{C})$ correspondante, transforme un état polygone régulier quelconque en un état GHZ. Le GHZ et (3.27) sont bien SLOCC-équivalents. On peut alors conclure par unicité de la forme canonique que le GHZ est bien la forme canonique de n'importe quel état polygone régulier.

3.2.4 Etats polygones réguliers dans la représentation DMPS

Décomposition des états polygones réguliers dans la base polygone régulier

Les états polygones réguliers, ainsi que la base polygone régulier forment tous deux un polygone régulier dans la sphère de Bloch. Néanmoins, ces deux polygones ne sont pas identiques. En effet, pour un état à N qubits l'état polygone régulier forme un polygone à N côtés dans un plan parallèle à l'équateur. Alors que, le polygone régulier formé par la base possède $N + 1$ côtés et se situe toujours dans le plan de l'équateur.

Pour un système à 3 qubits, un état triangle équilatéral avec des coefficients quelconques

$$|\psi_\Delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_3|^2}} (d_0 |D_3^{(0)}\rangle + d_3 |D_3^{(3)}\rangle) \quad (3.53)$$

va se décomposer dans la base polygone régulier comme suit

$$|\psi_\Delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(|d_0|^2 + |d_3|^2)}} [(d_0 + id_3) |\phi_0\rangle^{\otimes 3} + (d_0 - d_3) |\phi_1\rangle^{\otimes 3} + (d_0 - id_3) |\phi_2\rangle^{\otimes 3} + (d_0 + d_3) |\phi_3\rangle^{\otimes 3}] \quad (3.54)$$

On peut vérifier que ces solutions respectent bien le système d'équations (2.48). On voit ici que la bond dimension est maximale, c'est-à-dire qu'elle a pour valeur $N + 1$.

3. Cela résulte du théorème sur les transformations de Möbius cité dans la section *Projection stéréographique et transformation de Möbius*.

Pour un polygone régulier à 5 qubits, la décomposition dans cette base donne

$$|\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{|d_0|^2 + |d_5|}} [(d_0 + (-1)^{1/3}d_5)|\phi_0\rangle^{\otimes 5} + (d_0 + (-1)^{1/3}d_5)|\phi_1\rangle^{\otimes 5} + (d_0 - d_5)|\phi_2\rangle^{\otimes 5} + (d_0 - (-1)^{1/3}d_5)|\phi_3\rangle^{\otimes 5} + (d_0 - (-1)^{2/3}d_5)|\phi_4\rangle^{\otimes 5} + (d_0 + d_5)|\phi_5\rangle^{\otimes 5}] \quad (3.55)$$

Encore une fois, cette solution vérifie le système d'équations (2.48). Et comme pour le cas à trois qubits, la solution a une bond dimension qui est maximale.

Pour les états à plus de qubits, comme pour le GHZ, les expressions dans la base polygone régulier deviennent trop compliquées et ne sont donc pas détaillées ici.

Décomposition des états polygones réguliers dans la base pyramidale

On avait vu que, pour le GHZ, la décomposition dans cette base était assez particulière. On peut s'attendre à ce que pour un état polygone régulier, on obtient une décomposition similaire. C'est bien le cas. Des tests ont été effectués ; ce qui a permis d'intuiter, pour tout N , la formule suivante :

$$|\psi_{\text{polygone régulier}}\rangle = \frac{d_0 - d_N}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_N|^2}} |\phi_0\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=1}^N \frac{d_N}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_N|^2}} \frac{2^{N/2}}{N} |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (3.56)$$

On vérifie que cette solution est la bonne en injectant les coefficients de (3.56) dans l'équation (2.51). En réalité, cette expression généralise la formule (3.23) pour le GHZ. Le coefficient c_0 ne sera nul que dans le cas où $d_0 = d_N$, c'est-à-dire quand la représentation de Majorana de l'état est un polygone régulier dans l'état de l'équateur. Comme pour le GHZ, tous les autres coefficients c_m sont identiques. Plus la différence entre d_0 et d_N s'agrandit, plus l'état a une grande contribution en le vecteur $|\phi_0\rangle$. Ainsi, la forme de la décomposition, va également dépendre de la distance entre les plans dans lesquels se trouvent les polygones réguliers.

La bond dimension pour ce genre d'état est maximale uniquement si $d_0 \neq d_N$, dans le cas contraire la bond dimension vaut N .

Décomposition des états polygones réguliers dans la base bipyramidale.

Les états polygones réguliers vont avoir une décomposition particulière dans la base bipyramidale. Pour un nombre de qubits arbitraire la décomposition de l'état

$$|\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_N|^2}} (d_0 |D_N^{(0)}\rangle + d_N |D_N^{(N)}\rangle) \quad (3.57)$$

va donner

$$|\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|d_0|^2 + |d_N|^2}} (d_0 |\phi_0\rangle^{\otimes N} + d_N |\phi_N\rangle^{\otimes N}) \quad (3.58)$$

Comme pour le GHZ, la décomposition dans la base bipyramidale d'un état polygone régulier donne cet état polygone régulier dans la base de Dicke.

La représentation bipyramidale donne lieu à une bond dimension optimale pour les états polygones réguliers. En effet, on sait que les états polygones réguliers ne sont pas séparables, donc de bond dimension différente de 1, et que dans cette base seulement deux coefficients non nuls suffisent à décrire l'état. Donc la bond dimension base vaut 2 et est optimale.

3.2.5 Tableau récapitulatif des représentations des états polygones réguliers

Dicke	$ \psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{ d_0 ^2 + d_N ^2}} (d_0 D_N^{(0)}\rangle + d_N D_N^{(N)}\rangle)$
Majorana	<p>N impair : $\left\{ (\theta_j, \varphi_j) = \left(2 \operatorname{arccot} \left(\left \left(\frac{d_0}{d_N} \right)^{1/N} \right \right), \arg \left(\left(\frac{d_0}{d_n} \right)^{1/N} e^{i \frac{2\pi}{N} j} \right) \right), j = 1, \dots, N \right\}$</p> <p>N pair : $\left\{ (\theta_j, \varphi_j) = \left(2 \operatorname{arccot} \left(\left \left(\frac{d_0}{d_N} \right)^{1/N} \right \right), \arg \left(\left(\frac{d_0}{d_n} \right)^{1/N} e^{i \frac{(2j-1)\pi}{N}} \right) \right), j = 1, \dots, N \right\}$</p>
Mandilara et al.	$ \psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{ d_0 ^2 + d_N ^2}} (d_0 0\rangle^{\otimes N} + d_N 1\rangle^{\otimes N})$ <p>Forme canonique LOCC : $\psi_{\text{polygone cano}}^{\text{LU}}\rangle = \frac{ d_N }{\sqrt{(d_0 ^2 + d_N ^2)}} (0\rangle^{\otimes N} + \frac{ d_0 }{ d_N } 1\rangle^{\otimes N})$</p> <p>Forme canonique SLOCC : $\psi_{\text{polygone}}^{\text{ILO}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle^{\otimes N} + 1\rangle^{\otimes N})$</p>
DMPS	<p>Base polygone régulier : $\psi_{\Delta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(d_0 ^2 + d_3 ^2)}} ((d_0 + id_3) \phi_0\rangle^{\otimes 3} + (d_0 - d_3) \phi_1\rangle^{\otimes 3} + (d_0 - id_3) \phi_2\rangle^{\otimes 3} + (d_0 + d_3) \phi_3\rangle^{\otimes 3})$ (Pour $N = 3$) Bond dimension : $D = 4$</p> <p>Base pyramidale : $\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{d_0 - d_N}{\sqrt{ d_0 ^2 + d_3 ^2}} \phi_0\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=1}^N \frac{d_N}{\sqrt{ d_0 ^2 + d_3 ^2}} \frac{2^{N/2}}{N} \phi_m\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = N + 1$</p> <p>Base bipyramidale : $\psi_{\text{polygone}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{ d_0 ^2 + d_N ^2}} (d_0 \phi_0\rangle^{\otimes N} + d_N \phi_N\rangle^{\otimes N})$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = 2 \rightarrow$ optimale</p>

3.3 Etats de la base de Dicke

3.3.1 Etats de Dicke dans la représentation de Dicke

Les états de Dicke sont les vecteurs constituant la base de Dicke ; c'est-à-dire les $N + 1$ vecteurs $|D_N^{(k)}\rangle$ pour $k = 0, 1, \dots, N$ définis à l'équation (2.5). Ces états ont déjà été produits expérimentalement, notamment en 2009 par R. Prevedel *et al.* à grâce à des photons [37]. C'est d'ailleurs un de leurs grands avantages, ils sont facilement produits en laboratoire [32, 33]. Ils se sont montrés également utiles dans divers problèmes, notamment pour dans la classification SLOCC [10], mais aussi dans la conception d'inégalités de Hardy [38]. Un de ces états porte un nom particulier, l'état $|W\rangle$ qui est l'état $|D_N^{(1)}\rangle$. Les états de Dicke, en particulier l'état W , ont des applications dans le domaine de l'information quantique. Il a, par exemple, déjà été montré que pour des systèmes à 3 qubits, il n'existe que trois classes SLOCC, l'une est la classe du $|GHZ\rangle$, la seconde est la classe de l'état $|W\rangle$, et la dernière celle des états séparables [22]. Les vecteurs de la base de Dicke ne sont pas maximale-ment intriqués, au sens de l'entropie d'intrication, à l'exception du vecteur $|D_N^{(N/2)}\rangle$ pour tout N pair, qui est un état dont sa matrice densité réduite à un qubit est maximale-ment mélangée.

3.3.2 Etats de la base de Dicke dans la représentation de Majorana

Le polynôme de Majorana pour l'état $|D_N^{(k)}\rangle$ est

$$P(z) = (-1)^k C_N^k z^k \quad (3.59)$$

Ainsi, les racines de ce polynôme sont dégénérées $N - k$ fois en l'infini (ce qui correspond à des angles $(\theta = 0, \varphi = 0)$ dans équation (2.13)) et k fois en 0 (ce qui correspond à des angles $(\theta = \phi, \varphi = 0)$ dans équation (2.13)). La représentation de l'état sur la sphère de Bloch, correspond à un point $N - k$ dégénéré au pôle nord et un point k fois dégénéré au pôle sud, comme le montre la Figure 3.8.

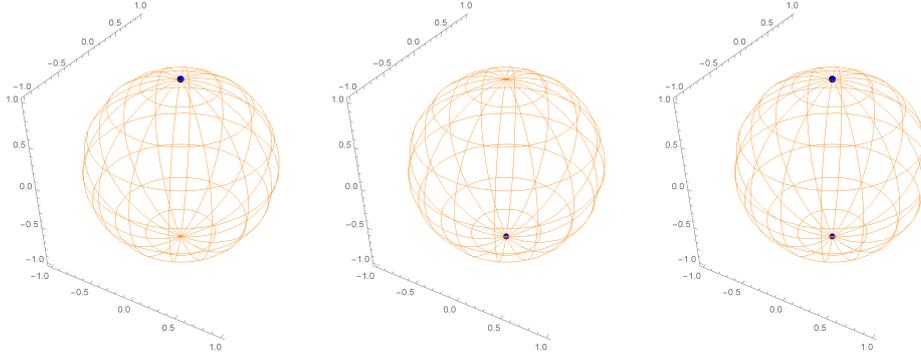


FIGURE 3.8 – A gauche, la représentation de Majorana de l'état $|D_N^{(0)}\rangle$; au milieu, de l'état $|D_N^{(N)}\rangle$ et à droite de l'état $|D_N^{(k)}\rangle$ pour tout $k = 1, \dots, N - 1$.

3.3.3 Etats de la base de Dicke dans la représentation de Mandilara *et al.*

Pour pouvoir posséder une représentation de Mandilara *et al.*, il faut que les racines du polynôme de Majorana ne soient pas trop dégénérées. Pour rappel, si γ est la plus haute dégénérescence des racines, alors il faut que $\gamma < \frac{N+1}{2}$ ou que $\gamma = N$ si N est impair et que $\gamma < \frac{N+2}{2}$ ou que $\gamma = N$ si

N est pair pour que la forme de Mandilara existe. Or, on sait que les états de Dicke ont des points de Majorana qui sont $N - k$ fois dégénérés en l'infini, et k fois en 0.

Si N est impair, l'état de Dicke avec la dégénérescence $\gamma = (N + 1)/2$ la plus basse est l'état $|D_N^{(N+1)/2}\rangle$ (ou $\gamma = (N + 3)/2$ pour l'état $|D_N^{(N+3)/2}\rangle$). La dégénérescence γ est donc supérieure ou égale à $\frac{N+1}{2}$ pour tous les états de Dicke. Ainsi, seuls les états $|D_N^{(0)}\rangle$ et $|D_N^{(N)}\rangle$, qui ont chacun une dégénérescence $\gamma = N$, possèdent une représentation de Mandilara *et al.*, trivialement données par $|0\rangle^{\otimes N}$ et $|1\rangle^{\otimes N}$.

Si N est pair, l'état de Dicke avec la dégénérescence $\gamma = N/2$ la plus basse est l'état $|D_N^{N/2}\rangle$. C'est le seul état dont la dégénérescence est inférieure à $\frac{N+2}{2}$. Malheureusement, notre algorithme n'est pas assez puissant pour obtenir sa représentation de Mandilara *et al.*. Ainsi, pour le cas pair, seuls trois états de Dicke ($|D_N^{(0)}\rangle$, $|D_N^{(N)}\rangle$ et $|D_N^{(N/2)}\rangle$) possèdent une forme de Mandilara *et al.*, mais on ne connaît que la décomposition pour les deux premiers, qui est, trivialement, $|0\rangle^{\otimes N}$ et $|1\rangle^{\otimes N}$.

La forme canonique LOCC

Pour les états $|D_N^{(0)}\rangle$ et $|D_N^{(N)}\rangle$, il est évident que la forme canonique LOCC est $|0\rangle^{\otimes N}$. En effet, $|0\rangle^{\otimes N}$ est bien l'équation (2.62)/(2.63) où tous les coefficients y_m sont nuls. De plus, $|D_N^{(N)}\rangle$ et $|0\rangle^{\otimes N}$ sont reliés par une transformation $SU(2)$ (une rotation d'angle $\theta = \pi$). En effet, il suffit d'effectuer une rotation de π des points de Majorana autour de l'axe x . En fait, l'état $|0\rangle^{\otimes N}$ est le représentant de tous les états séparables à N qubits.

Pour le Dicke $|D_N^{(N/2)}\rangle$, comme nous n'avons pas sa représentation de Mandilara *et al.*, nous n'avons évidemment pas sa forme canonique LOCC.

La forme canonique SLOCC

Par un raisonnement similaire à celui des formes canoniques LOCC, on peut immédiatement dire que la forme canonique des états séparables que sont $|D_N^{(0)}\rangle$ et $|D_N^{(N)}\rangle$ est l'état $|0\rangle^{\otimes N}$. Sans la forme de Mandilara *et al.* de $|D_N^{(N/2)}\rangle$ nous ne pouvons pas calculer sa forme canonique SLOCC.

3.3.4 Les états de Dicke dans la représentation DMPS

Décomposition des états de Dicke dans la base polygone régulier

On décompose d'abord les états de Dicke pour 3 qubits dans la base (2.46).

$$|D_3^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_0\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.60)$$

$$|D_3^{(1)}\rangle = -\frac{i}{\sqrt{6}}|\phi_0\rangle^{\otimes 3} - \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} + \frac{i}{\sqrt{6}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.61)$$

$$|D_3^{(2)}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_0\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} - \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.62)$$

$$|D_3^{(3)}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|\phi_0\rangle^{\otimes 3} - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} - \frac{i}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.63)$$

Seul le vecteur $|D_3^{(0)}\rangle$ possède des coefficients qui sont tous identiques. La dimension est maximale pour $|D_3^{(0)}\rangle$ et vaut N pour les autres vecteurs.

Les expressions des états de Dicke à 4 qubits sont beaucoup plus longues et compliquées. Elles ne seront donc pas mentionnées explicitement ici, à l'exception de $|D_4^{(0)}\rangle$ qui a l'expression simple suivante

$$|D_4^{(0)}\rangle = \frac{4}{5}|\phi_0\rangle^{\otimes 4} + \frac{4}{5}|\phi_1\rangle^{\otimes 4} + \frac{4}{5}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} + \frac{4}{5}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{4}{5}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.64)$$

Comme pour $|D_3^{(0)}\rangle$, tous les coefficients c_m sont égaux. On devine alors la forme générale de ces coefficients pour un nombre de qubits N quelconque

$$|D_N^{(0)}\rangle = \frac{2^{N/2}}{N+1} \sum_{m=0}^N |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (3.65)$$

Ces coefficients $\frac{2^{N/2}}{N+1}$ vérifient en effet le système d'équations (2.48).

Il est intéressant de remarquer que $|D_N^{(N)}\rangle = |1\rangle^{\otimes N}$, contrairement à $|D_N^{(0)}\rangle = |0\rangle^{\otimes N}$, a une expression compliquée dans la base polygone régulier dans la mesure où ses coefficients c_m ne sont pas tous identiques. Ainsi, le fait que tous les coefficients c_m de $|D_N^{(0)}\rangle$ soient égaux est propre à ce vecteur et n'est pas une propriété des états séparables.

Décomposition des états de Dicke dans la base pyramidale

Les états de Dicke à 3 qubits se décomposent, dans la base pyramidale (2.49), comme suit

$$|D_3^{(0)}\rangle = |\phi_0\rangle^{\otimes 3} \quad (3.66)$$

$$|D_3^{(1)}\rangle = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}})|\phi_1\rangle^{\otimes 3} + \frac{2}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.67)$$

$$|D_3^{(2)}\rangle = \frac{2}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}})|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.68)$$

$$|D_3^{(3)}\rangle = -|\phi_0\rangle^{\otimes 3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.69)$$

La décomposition de $|D_3^{(0)}\rangle = |0\rangle^{\otimes 3}$ est triviale puisqu'il n'y a qu'une contribution du vecteur de base $|\phi_0\rangle^{\otimes 3} = |0\rangle^{\otimes 3}$. La bond dimension dans cette base est donc optimale.

Le vecteur $|D_3^{(3)}\rangle = |1\rangle^{\otimes 3}$ se décompose aussi d'une façon relativement simple, avec une contribution de -1 en $|\phi_0\rangle^{\otimes 3}$ et d'une même contribution $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ pour tous les autres vecteurs de base. Pour ces états, la bond dimension est égale à $N+1$, et est donc maximale.

Les autres coefficients ont une décomposition plus compliquée, mais la bond dimension n'est pas maximale puisqu'elle vaut N .

Les états de Dicke à 4 qubits s'expriment dans la base pyramidale comme

$$|D_4^{(0)}\rangle = |\phi_0\rangle^{\otimes 4} \quad (3.70)$$

$$|D_4^{(1)}\rangle = -\frac{i}{2}|\phi_1\rangle^{\otimes 4} - \frac{1}{2}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} + \frac{i}{2}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{2}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.71)$$

$$|D_4^{(2)}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_1\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} - \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.72)$$

$$|D_4^{(3)}\rangle = \frac{i}{2}|\phi_1\rangle^{\otimes 4} - \frac{1}{2}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} - \frac{i}{2}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{1}{2}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.73)$$

$$|D_4^{(4)}\rangle = -|\phi_0\rangle^{\otimes 4} + |\phi_1\rangle^{\otimes 4} + |\phi_2\rangle^{\otimes 4} + |\phi_3\rangle^{\otimes 4} + |\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.74)$$

Comme pour le cas à 3 qubits, on trouve que $|D_4^{(0)}\rangle$ se décompose uniquement selon le vecteur $|\phi_0\rangle^{\otimes 4}$. En toute généralité, on a $|D_N^{(0)}\rangle = |\phi_0\rangle^{\otimes N}$ pour tout N . En effet, une telle solution vérifie bien le système d'équations (2.51). La bond dimension est donc optimale pour tout N .

Le vecteur $|D_4^{(4)}\rangle$ a également une décomposition relativement simple. Encore une fois, il a une contribution du vecteur $|\phi_0\rangle^{\otimes 4}$ avec une amplitude -1 et une contribution égale des autres vecteurs. En étudiant, $|D_5^{(5)}\rangle, |D_6^{(6)}\rangle$ on devine que

$$|D_N^{(N)}\rangle = -|\phi_0\rangle^{\otimes N} + \frac{2^{N/2}}{N} \sum_{m=1}^N |\phi_m\rangle^{\otimes N} \quad (3.75)$$

Cette formule vérifie bien le système d'équations (2.51), et est de bond dimension maximale. Les autres vecteurs de Dicke pour $k \neq 0, N$ pour un nombre de qubits plus grand présentes des formes plus compliqués. Nous ne sommes pas parvenus à obtenir une formule pour ces états de Dicke valable pour tout N . On remarque néanmoins qu'il n'y a jamais de contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes N}$.

Décomposition des états de Dicke dans la base bipyramidale

Dans la base bipyramidale, les états de Dicke à 3 qubits prennent la forme

$$|D_3^{(0)}\rangle = |\phi_0\rangle^{\otimes 3} \quad (3.76)$$

$$|D_3^{(1)}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_1\rangle^{\otimes 3} - \sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.77)$$

$$|D_3^{(2)}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_0\rangle^{\otimes 3} + \sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_2\rangle^{\otimes 3} + \sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.78)$$

$$|D_3^{(3)}\rangle = |\phi_3\rangle^{\otimes 3} \quad (3.79)$$

Trivialement, le vecteur $|D_3^{(0)}\rangle = |0\rangle^{\otimes 3}$ a uniquement une contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes 3} = |0\rangle^{\otimes 3}$. Il en va de même pour $|D_3^{(3)}\rangle = |\phi_3\rangle^{\otimes 3} = |1\rangle^{\otimes 3}$. La bond dimension est donc optimale pour ces deux vecteurs.

Remarquons également que $|D_3^{(1)}\rangle$ n'a pas de contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes 3}$ et que $|D_3^{(2)}\rangle$ n'a pas de contribution en $|\phi_3\rangle^{\otimes 3}$. Leur bond dimension dans cette base n'est donc pas maximale.

A quatre qubits, les états de Dicke s'expriment comme suit

$$|D_4^{(0)}\rangle = |\phi_0\rangle^{\otimes 4} \quad (3.80)$$

$$|D_4^{(1)}\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_1\rangle^{\otimes 4} + \frac{2}{3}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} - \frac{2}{3}(1 + (-1)^{2/3})|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{2}{3}(-1)^{2/3}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.81)$$

$$|D_4^{(2)}\rangle = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} + \frac{2}{3}(-1)^{2/3}\sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} - \frac{\sqrt{2}}{9}(3i + \sqrt{3})|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.82)$$

$$|D_4^{(3)}\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_0\rangle^{\otimes 4} + \frac{2}{3}|\phi_2\rangle^{\otimes 4} + \frac{2}{3}|\phi_3\rangle^{\otimes 4} + \frac{2}{3}|\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.83)$$

$$|D_4^{(4)}\rangle = |\phi_4\rangle^{\otimes 4} \quad (3.84)$$

Le vecteur $|D_4^{(1)}\rangle$ n'a pas de contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes 4}$ alors que $|D_4^{(3)}\rangle$ n'a pas de contribution en $|\phi_1\rangle^{\otimes 4}$. Cette propriété semble se généraliser pour un nombre de qubits N quelconque : $|D_N^{(1)}\rangle$ n'a

pas de contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes N}$ et $|D_N^{(N-1)}\rangle$ n'a pas de contribution en $|\phi_1\rangle^{\otimes N}$. L'état $|D_4^{(2)}\rangle$ n'a ni de contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes 4}$ ni en $|\phi_1\rangle^{\otimes 4}$. En effectuant, des tests sur des systèmes avec plus de qubits, il semble que les vecteurs $|D_N^{(k)}\rangle$ pour tout $k \neq 0, 1, N-1, N$, n'ont pas de contribution en $|\phi_0\rangle^{\otimes N}$ et $|\phi_1\rangle^{\otimes N}$. Pour ces états, la bond dimension vaut alors $N-1$.

L'état W et la généralisation de Mandilara *et al.* aux états non-génériques

A la lumière de la représentation DMPS, une question se pose naturellement : *Est-ce que la représentation DMPS donnant l'optimal bond dimension ne pourrait pas généraliser la représentation de Mandilara *et al.* aux états non-génériques ?*

Pour qu'on puisse répondre par l'affirmative à cette question, il faut que la représentations DMPS qui donne l'optimal bond dimension soit unique. En effet, vu la construction des formes canoniques LOCC et SLOOC, pour avoir leur unicité et donc pour qu'elles aient une utilité, il faut que la représentation de Mandilara *et al.* pour un état donné soit unique. Dans le complément d'information [5], les auteurs de l'article ont prouvé que l'optimal bond dimension de l'état $|W\rangle = |D_N^{(1)}\rangle$ est N . L'étude de l'état $|W\rangle$ à 3 et 4 qubits dans les bases pyramidale et bipyramidale (soit les équations (3.67),(3.71),(3.77) et (3.81)) donne une représentation DMPS avec une bond dimension $D = N$. Cette bond dimension de l'état $|W\rangle$ est donc optimale pour ces deux bases. Ainsi, on a trouvé deux représentations DMPS pour l'état $|W\rangle$ qui donnent une optimal bond dimension. On a donc montré que la représentation DMPS donnant l'optimal bond dimension n'est, en général, pas unique. On répond alors à la question posée précédemment : **non, la notion d'optimal bond dimension ne généralise pas la représentation de Mandilara *et al.* aux états non-génériques.** Néanmoins, on voit ici une différence entre les états génériques et les états qui ne le sont pas. Les états génériques ont une représentation DMPS qui donne l'optimal bond dimension unique, alors qu'elle ne l'est en général, pas pour les états non-génériques.

3.3.5 Tableau récapitulatif des représentations des états de Dicke

Nos résultats aux états de Dicke $|D_N^{(0)}\rangle$ et $|D_N^{(N)}\rangle$ sont synthétisés dans les tableaux ci-dessous

L'état de Dicke $|D_N^{(0)}\rangle$

Dicke	$ D_N^{(0)}\rangle$
Majorana	Les angles des points : $\{(\theta_i, \varphi_i) = (0, 0), i = 1, \dots, N\}$
Mandilara et al.	$ D_N^{(0)}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$
	Forme canonique LOCC : $ D_N^{(0), \text{cano LU}}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$
	Forme canonique SLOCC : $ D_N^{(0), \text{cano ILO}}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$
DMPS	Base polygone régulier : $ D_3^{(0)}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_0\rangle^{\otimes 3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle^{\otimes 3} - \frac{i}{\sqrt{2}} \phi_2\rangle^{\otimes 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3\rangle^{\otimes 3}$ (Pour $N = 3$) Bond dimension : $D = 4$
	Base pyramidale : $ D_N^{(0)}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = 1 \rightarrow$ optimale
	Base bipyramidale : $ D_N^{(0)}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = 1 \rightarrow$ optimale

L'état de Dicke $|D_N^{(N)}\rangle$

Dicke	$ D_N^{(N)}\rangle$
Majorana	$\{(\theta_i, \varphi_i) = (\pi, 0), i = 1, \dots, N\}$
Mandilara et al.	$ D_N^{(N)}\rangle = 1\rangle^{\otimes N}$
	Forme canonique LOCC : $ D_N^{(N), \text{cano LU}}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$
	Forme canonique SLOCC : $ D_N^{(N), \text{cano LO}}\rangle = 0\rangle^{\otimes N}$
DMPS	Base polygone régulier : $ D_N^{(N)}\rangle = \sum_{m=0}^N \frac{2^{N/2}}{N+1} \phi_m\rangle^{\otimes N}$ (Pour $N = 3$) Bond dimension : $D = N + 1$
	Base pyramidale : $ D_N^{(N)}\rangle = - \phi_0\rangle^{\otimes N} + \sum_{m=1}^N \frac{2^{N/2}}{N} \phi_m\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = N + 1$
	Base bipyramidale : $ D_N^{(N)}\rangle = 1\rangle^{\otimes N}$ (Pour tout N) Bond dimension : $D = 1 \rightarrow$ optimale

Conclusion

Ce mémoire s'est proposé d'étudier différentes représentations d'états multiqubits symétriques. Plus particulièrement, les représentations Diagonal Matrix Product States (DMPS) et de Mandilara *et al.*, qui sont d'un grand intérêt pour la classification de l'intrication. L'objectif de ce mémoire était, non seulement, d'établir les liens entre ces différentes représentations, mais également de les illustrer explicitement sur des états emblématiques de la théorie de l'information quantique. Ceci avait un triple intérêt puisque l'expression de ces états dans ces représentations permet, en plus d'illustrer ces dernières, d'approfondir la connaissance générale sur ces états, et de développer des codes Mathematica permettant le passage automatisé entre représentations.

Au chapitre 2, nous avons commencé par exposer les différentes représentations d'états multiqubits symétriques. Ensuite, nous avons abordé plusieurs questions. La première était de savoir s'il existait une méthode générale pour passer de la représentation de Mandilara *et al.* à la représentation DMPS. Nous avons montré qu'une telle méthode existe et l'avons décrite. Le passage inverse, de la représentation DMPS à la représentation de Mandilara *et al.*, s'avère lui plus compliqué, et nous n'avons pas réussi à trouver de méthode générale. Ensuite, nous avons voulu déterminer s'il existait un lien entre la notion d'optimal bond dimension propre à la représentation DMPS et la représentation de Mandilara *et al.*. Nous avons effectivement montré un lien fort entre celles-ci : pour les états génériques, si l'on trouve une représentation DMPS dont le nombre de coefficients non nuls est inférieur ou égal à $(N + 1)/2$, alors cette DMPS donne l'optimal bond dimension. De plus, cette représentation est unique et coïncide avec la représentation de Mandilara *et al.*. Une conséquence directe de ceci est que la représentation de Mandilara *et al.* donne directement l'optimal bond dimension, servant à la classification des états intriqués en famille [5]. Notre résultat pourrait donner lieu à une nouvelle méthode pour calculer la représentation de Mandilara *et al.*. En effet, la méthode proposée dans l'article de Mandilara *et al.* [6], que nous avons décrite au chapitre 2, s'avère couteuse en temps de calcul. Une première perspective de ce mémoire serait d'implémenter l'algorithme proposé dans le complément d'information de [5], permettant de calculer la DMPS donnant l'optimal bond dimension, et de s'en servir pour déterminer la représentation de Mandilara *et al.* d'un état multiqubit symétrique.

C'est également au chapitre 2 que nous avons pu répondre à une des questions qui a motivé ce mémoire : *Les formes canoniques SLOCC de Mandilara et al. sont-elles maximalelement intriquées au sens d'une l'entropie d'intrication maximale?* En étudiant la forme canonique d'états spécifiques, nous avons montré que non, les formes canoniques SLOCC ne sont pas toujours maximalelement intriquées, même si elles peuvent l'être (cas du GHZ). La question de savoir si toutes les classes d'états génériques contiennent au moins un état maximalelement intriqué reste donc ouverte. Pour pourvoir répondre à cette question, une étude plus approfondie de la représentation de Mandilara *et al.* et de la recherche d'états génériques avec une telle propriété reste donc à effectuer.

Au vu des résultats précédents, nous avons abordé une autre question : *la représentation DMPS permet-elle de généraliser celle de Mandilara et al. pour les états non-génériques?* C'est dans le chapitre 3, et en illustrant les différentes représentations, que nous sommes parvenus à répondre à cette question par la négative. L'étude de l'état $|W\rangle$ dans différentes représentations DMPS a montré qu'il existe plusieurs de ces représentations avec une optimal bond dimension. Si l'on souhaite que la représentation de Mandilara *et al.* reste unique, la DMPS pour les états non-génériques ne suffit pas à définir une telle représentation. Néanmoins, cela a permis de mettre en évidence une différence fondamentale entre les états génériques et ceux qui ne le sont pas : la représentation DMPS donnant lieu à l'optimal bond dimension est unique pour les états génériques mais ne l'est, en général, pas pour les états non-génériques.

Par ailleurs, le chapitre 3 aura permis d'illustrer toutes les représentations sur les états $|GHZ\rangle$, les états polygones réguliers et les états de Dicke (dont l'état $|W\rangle$). Nous avons également montré que les formes canoniques SLOCC de Mandilara *et al.* pour le GHZ et les états polygones réguliers sont le GHZ lui-même. Nous avons ensuite réussi à obtenir des formules explicites permettant d'exprimer le GHZ, les états polygones réguliers et certains états de Dicke à n'importe quels nombres de qubits dans différentes représentations DMPS que nous avons introduites.

Il existe plusieurs perspectives dans la continuité directe de ce mémoire. Premièrement, on pourrait chercher à optimiser les codes Mathematica développés dans ce mémoire. En effet, les codes implémentant le passage à la représentation de Mandilara *et al.* demandent actuellement un temps de calcul prohibitif, même pour un nombre de qubits peu élevé. Deuxièmement, implémenter la méthode décrite dans le complément d'information [5] pour déterminer la DMPS d'un état avec l'optimal bond dimension serait intéressant, car on pourrait alors comparer son efficacité pour calculer la représentation de Mandilara *et al.*, par rapport à celle qui est décrite dans [6]. Nous n'avons pas encore réussi à déterminer si les classes SLOCC d'états génériques (états dont la dégénérescence des points de Majorana n'est pas trop élevée, voir équations (2.55)-(2.56)) contiennent au moins un état maximale-ment intriqué. On peut reformuler cette question en termes d'optimal bond dimension comme suit : les états dont l'optimal bond dimension est inférieur ou égale à $(N + 1)/2$ appartiennent-ils à une classe SLOCC qui contient des états maximale-ment intriqués? Ensuite, une étude systématique d'autres états que ceux présentés ici serait également intéressante dans le contexte de la classification de l'intrication. Enfin, une dernière perspective serait de trouver une façon de généraliser la représentation de Mandilara *et al.* aux états non-génériques, afin de pouvoir bénéficier des avantages qu'offrent les formes canoniques pour tous les états symétriques de systèmes multiqubits.

Bibliographie

- [1] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10) :777, 1935.
- [2] JS Bell. *Physics long island city. NY*, 1(195) :1, 1964.
- [3] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25) :1804, 1982.
- [4] Peter W Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, 41(2) :303–332, 1999.
- [5] M Sanz, IL Egusquiza, R Di Candia, H Saberi, L Lamata, and E Solano. Entanglement classification with matrix product states. *Scientific reports*, 6 :30188, 2016.
- [6] A Mandilara, T Coudreau, A Keller, and P Milman. Entanglement classification of pure symmetric states via spin coherent states. *Physical Review A*, 90(5) :050302, 2014.
- [7] Robert H Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical Review*, 93(1) :99, 1954.
- [8] Ettore Majorana and Massimo Inguscio. Oriented atoms in a variable magnetic field. In *Ettore Majorana Scientific Papers*, pages 113–136. Springer, 2006.
- [9] Michael Walter, David Gross, and Jens Eisert. Multi-partite entanglement. *arXiv preprint arXiv :1612.02437*, 2016.
- [10] Thierry Bastin, Stéphanie Krins, Pierre Mathonet, Michel Godefroid, Lucas Lamata, and E Solano. Operational families of entanglement classes for symmetric n-qubit states. *Physical review letters*, 103(7) :070503, 2009.
- [11] Dorian Baguette. *Intrication maximale d'états multiqubits symétriques et interprétation en termes d'états de spin*. PhD thesis, 2017.
- [12] Daniel M Greenberger, Michael A Horne, and Anton Zeilinger. Going beyond bell's theorem. In *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, pages 69–72. Springer, 1989.
- [13] Mark Hillery, Vladimír Bužek, and André Berthiaume. Quantum secret sharing. *Physical Review A*, 59(3) :1829, 1999.
- [14] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660) :575, 1997.
- [15] Paul G Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Physical Review Letters*, 75(24) :4337, 1995.
- [16] Bruce E Kane. A silicon-based nuclear spin quantum computer. *nature*, 393(6681) :133, 1998.

- [17] MV Gurudev Dutt, L Childress, L Jiang, E Togan, J Maze, F Jelezko, AS Zibrov, PR Hemmer, and MD Lukin. Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond. *Science*, 316(5829) :1312–1316, 2007.
- [18] David Kielpinski, Chris Monroe, and David J Wineland. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer. *Nature*, 417(6890) :709, 2002.
- [19] Jonathan R Friedman, Vijay Patel, Wei Chen, SK Tolpygo, and James E Lukens. Quantum superposition of distinct macroscopic states. *nature*, 406(6791) :43, 2000.
- [20] Charles H Bennett, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich, John A Smolin, and Ashish V Thapliyal. Exact and asymptotic measures of multipartite pure-state entanglement. *Physical Review A*, 63(1) :012307, 2000.
- [21] Reinhard F Werner and Michael M Wolf. All-multipartite Bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. *Physical Review A*, 64(3) :032112, 2001.
- [22] Wolfgang Dür, Guifre Vidal, and J Ignacio Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 62(6) :062314, 2000.
- [23] Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, Bart De Moor, and Henri Verschelde. Four qubits can be entangled in nine different ways. *Physical Review A*, 65(5) :052112, 2002.
- [24] Claude Cohen-Tannoudji, Franck Laloe, and Bernard Diu. *Mécanique quantique*, volume 3. EDP Sciences, 2017.
- [25] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of modern physics*, 81(2) :865, 2009.
- [26] Martin Aulbach. Classification of entanglement in symmetric states. *International Journal of Quantum Information*, 10(07) :1230004, 2012.
- [27] Frank Verstraete, Valentin Murg, and J Ignacio Cirac. Matrix product states, projected entangled pair states, and variational renormalization group methods for quantum spin systems. *Advances in Physics*, 57(2) :143–224, 2008.
- [28] David Perez-Garcia, Frank Verstraete, Michael M Wolf, and J Ignacio Cirac. Matrix product state representations. *arXiv preprint quant-ph/0608197*, 2006.
- [29] Ulrich Schollwöck. The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states. *Annals of Physics*, 326(1) :96–192, 2011.
- [30] Jens Eisert and Hans J Briegel. Schmidt measure as a tool for quantifying multiparticle entanglement. *Physical Review A*, 64(2) :022306, 2001.
- [31] P Ribeiro and R Mosseri. Entanglement in the symmetric sector of n qubits. *Physical review letters*, 106(18) :180502, 2011.
- [32] C Thiel, J Von Zanthier, Thierry Bastin, E Solano, and GS Agarwal. Generation of symmetric Dicke states of remote qubits with linear optics. *Physical review letters*, 99(19) :193602, 2007.
- [33] Bernd Lücke, Jan Peise, Giuseppe Vitagliano, Jan Arlt, Luis Santos, Géza Tóth, and Carsten Klempt. Detecting multiparticle entanglement of Dicke states. *Physical review letters*, 112(15) :155304, 2014.
- [34] John K Stockton, JM Geremia, Andrew C Doherty, and Hideo Mabuchi. Characterizing the entanglement of symmetric many-particle spin-1 systems. *Physical Review A*, 67(2) :022112, 2003.
- [35] M Żukowski, A Zeilinger, MA Horne, and H Weinfurter. Quest for GHZ states. *Acta Phys. Pol. A*, 93 :187, 1998.

- [36] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. *Physical Review Letters*, 82(7) :1345, 1999.
- [37] Robert Prevedel, Gunther Cronenberg, Mark S Tame, Mauro Paternostro, Philip Walther, Mu-Seong Kim, and Anton Zeilinger. Experimental realization of dicke states of up to six qubits for multiparty quantum networking. *Physical review letters*, 103(2) :020503, 2009.
- [38] Zizhu Wang, Damian Markham, et al. Nonlocality of symmetric states. *Physical review letters*, 108(21) :210407, 2012.
- [39] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of quantum states : an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2017.
- [40] Alexander Wong and Nelson Christensen. Potential multiparticle entanglement measure. *Physical Review A*, 63(4) :044301, 2001.
- [41] Wojciech Ganczarek, Marek Kuś, and Karol Życzkowski. Barycentric measure of quantum entanglement. *Physical Review A*, 85(3) :032314, 2012.
- [42] Iain DK Brown, Susan Stepney, Anthony Sudbery, and Samuel L Braunstein. Searching for highly entangled multi-qubit states. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 38(5) :1119, 2005.
- [43] Martin B Plenio. Logarithmic negativity : a full entanglement monotone that is not convex. *Physical review letters*, 95(9) :090503, 2005.
- [44] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [45] Lieven MK Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta, Costantino S Yannoni, Mark H Sherwood, and Isaac L Chuang. Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 414(6866) :883, 2001.
- [46] Ben P Lanyon, Till J Weinhold, Nathan K Langford, Marco Barbieri, Daniel FV James, Alexei Gilchrist, and Andrew G White. Experimental demonstration of a compiled version of Shor’s algorithm with quantum entanglement. *Physical Review Letters*, 99(25) :250505, 2007.