

Fascicule d'exercices d'électromagnétisme

John Martin, Dorian Baguette, Alexandre Cesa, Jérôme Denis



I.P.N.A.S., bât. B15
Tél. : 04/366 28 64
email : jmartin@uliege.be

2019–2020

I

Calcul vectoriel

Rappels sur les intégrales curviligne et superficielle

Une courbe \mathcal{C} est paramétrée par un chemin $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

L'intégrale curviligne (ou circulation) d'un champ vectoriel \mathbf{A} le long d'une courbe orientée $\mathcal{C} = \{\mathbf{r}(t) : t \in [t_A, t_B]\}$ est notée

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\ell \quad \text{et est par définition égale à} \quad \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Une surface \mathcal{S} est paramétrée par une couverture $(\mathbf{r}(u, v), K)$ où $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ et $(u, v) \in K = [u_{\min}, u_{\max}] \times [v_{\min}, v_{\max}]$.

L'intégrale superficielle (ou flux) d'un champ vectoriel \mathbf{A} sur (au travers de) la surface orientée \mathcal{S} est notée

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{et est par définition égale à} \quad \int \int_K \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}) du dv$$

Rappels de calcul intégral

Quelques primitives à connaître...

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \quad (1) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}(x) \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \quad (2) \quad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \quad (5)$$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3) \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (6)$$

Changement de variable régulier $x = x(y)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(x(y)) \frac{dx}{dy}(y) dy$$

avec $a' = \lim_{x \rightarrow a} y(x)$ et $b' = \lim_{x \rightarrow b} y(x)$

Remarque : • Toutes les primitives sont définies à une constante additive près.
• $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Théorèmes de Gauss et de Stokes

Formule de Gauss (du flux ou d'Ostrogradsky)

Pour tout volume donné \mathcal{V} dont la frontière est une surface \mathcal{S} régulière, c'est-à-dire admettant une normale extérieure \mathbf{n} presque partout, on a

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

Formule de Stokes(-Ampère)

Pourvu que \mathbf{A} et $\nabla \times \mathbf{A}$ soient continus dans un domaine contenant la surface \mathcal{S} ouverte, limitée par le contour \mathcal{C} , on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

avec les règles de signes habituelles concernant \mathbf{n} et le sens de parcours de \mathcal{C} .

Scalaire, pseudoscalaire, vecteurs polaire et axial

- C1. Démontrez que le produit scalaire entre deux vecteurs polaires (resp. axiaux) est un scalaire (qui ne change donc pas de signe sous l'action d'une réflexion).
- C2. Démontrez que le produit vectoriel entre deux vecteurs polaires définit un vecteur axial.
- C3. Démontrez que le produit mixte entre trois vecteurs polaires est un pseudoscalaire.
- C4. Justifiez le fait que la position, la vitesse et la quantité de mouvement d'une particule sont des vecteurs polaires, tandis que le moment cinétique est un vecteur axial.
- C5. Démontrez que le produit scalaire entre un vecteur polaire et un vecteur axial définit un pseudoscalaire.
- C6. Démontrez que le produit vectoriel entre un vecteur polaire et un vecteur axial définit un vecteur polaire.

Dérivées de champs scalaires et vectoriels

C7. Calculez la dérivée du champ scalaire $V(\mathbf{r}) = x e^{-(y^2+x^2)}$ dans les directions $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et $\mathbf{n}' = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$.

C8. Dans une région de l'espace règne le potentiel électrostatique

$$V(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12).$$

Déterminez la position et la hauteur du maximum de potentiel. Déterminez ensuite la direction et le module de la plus grande pente au point $(1, 1)$.

C9*. Effectuez le développement en série de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ aux alentours de $\mathbf{r}' = 0$ jusqu'à l'ordre 2 inclus.

Divergence et rotationnel

- C10. Montrez que la divergence et le rotationnel du champ $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{r}/r^3$ sont nuls $\forall \mathbf{r} \neq 0$ mais que le flux au travers d'une surface sphérique de rayon R entourant l'origine est non nul. Remarque : le champ coulombien en est un cas particulier. Formellement, on obtient le même résultat par application de la formule de Gauss avec $\nabla \cdot \mathbf{A} = 4\pi\alpha \delta(\mathbf{r})$.
- C11. Montrez que le champ inhomogène $\mathbf{A} = (-x, y, 0)$ est simultanément indivergentiel et irrotationnel.
- C12. Montrez que le champ

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

est simultanément indivergentiel et irrotationnel $\forall \rho \neq 0$, mais que la circulation le long d'une boucle entourant l'axe \mathbf{e}_z est non nulle. Calculez celle-ci pour un tour complet dans le sens trigonométrique autour de \mathbf{e}_z .

Solution : $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = 2\pi$. Remarque : Formellement, on obtient le même résultat par application de la formule de Stokes avec $\nabla \times \mathbf{A} = 2\pi\delta(\rho)\delta(\varphi) \mathbf{e}_z/\rho = 2\pi\delta(x)\delta(y) \mathbf{e}_z$.

Intégration

C13. Calculez les intégrales (pour $a > 0$)

$$I_1 = \int_0^R \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$I_3 = \int_1^R \ln(x) dx$$

Solution : $I_1 = \sqrt{R^2 + a^2} - a$, $I_2 = \pi/(2a)$ et $I_3 = R \ln(R) - R + 1$.

C14. Calculez l'intégrale (pour $a > 0$)

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(x')\delta(y' - a)\chi_{[0,R]}(z')}{\sqrt{(a - x')^2 + (a - y')^2 + (z')^2}} dV'.$$

Solution : $I = \operatorname{arcsinh}(R/a)$.

Intégrales curvilignes et surfaciques

C15. Calculez l'intégrale volumique

$$\mathbf{A} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{r}) dV,$$

où le champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ exprimé en coordonnées sphériques est donné par

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sin(2\theta)\delta(r - R)\mathbf{e}_r.$$

Solution : $\mathbf{A} = \pi^2 R^2 \mathbf{e}_z / 2.$

C16. Calculez la circulation du champ vectoriel $\mathbf{A} = xy^2 \mathbf{e}_x + 2 \mathbf{e}_y + x \mathbf{e}_z$ le long de la courbe \mathcal{C} paramétrée par le chemin $\mathbf{r}(t) = (\alpha t, \alpha/t, \beta)$ pour $t : 1 \rightarrow 2$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution : $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \alpha^4 \ln 2 - \alpha$

C17. Calculez la circulation du champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ le long de la courbe $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{r}(\varphi) = \left(1 + \frac{\cos \varphi}{2}\right) (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) : \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$.

Solution : $\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0.$

Intégrales curvilignes et surfaciques

C18. Soit le champ de force $\mathbf{F} = y \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ et une courbe \mathcal{C} paramétrée par le chemin $\mathbf{r}(\theta) = (a - c + c \cos \theta) \mathbf{e}_x + (b + c \sin \theta) \mathbf{e}_y + c^2 \theta \mathbf{e}_z$ pour $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quelle est la forme de cette courbe? Montrez que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\ell = 0$. Ce résultat implique-t-il que \mathbf{F} est un champ de force conservatif?

Solution : $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\ell = 0$. Non

C19. Montrez que l'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ peut être paramétrée par le chemin

$$\mathbf{r}(t) = (a \sin t, b \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Soit le champ vectoriel $\mathbf{F} = y(4x^2 + y^2) \mathbf{e}_x + x(2x^2 + 3y^2) \mathbf{e}_y$. Calculez sa circulation le long de l'ellipse parcourue dans le sens trigonométrique ($t : 0 \rightarrow 2\pi$). Si l'ellipse est parcourue dans le sens horloger ($t : 2\pi \rightarrow 0$), que vaut alors la circulation?

Solution : $-\frac{1}{2}\pi ba^3, \frac{1}{2}\pi ba^3$

C20. Vérifiez la validité de la formule de Gauss en calculant i) le flux du champ vectoriel $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{r}/(r^2 + a^2)^{3/2}$ au travers de la surface définie par l'équation $|\mathbf{r}| = \sqrt{3}a$ et ii) l'intégrale volumique de la divergence de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sur le volume $|\mathbf{r}| \leq \sqrt{3}a$.

Solution : On obtient $\frac{3\sqrt{3}\pi\alpha}{2}$ dans les deux cas.

||

Électrostatique

Rappels d'électrostatique

Force de Coulomb : $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ avec $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

Travail de la force de Coulomb : $W_{\text{Coulomb}}(\mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{r}_B) = \int_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\ell'$

Potentiel et champ électrique :

Particules ponctuelles

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Distribution de charges

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Variation de potentiel électrique :

$$V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) = - \int_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\ell' = -W_{\text{Coulomb}, q=1}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

Énergie potentielle électrique : $U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$

Loi de Gauss et équation de Poisson : $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$, $\Delta V(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$

Rappels d'électrostatique

$$\begin{aligned} \text{Énergie électrostatique : } U &= \sum_{\text{paires}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV \end{aligned}$$

$$\text{Dipôle électrique ponctuel : } V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right)$$

$$\text{Moment dipolaire électrique : } \mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\ell' \quad \lambda(\mathbf{r}) \equiv \text{densité linéique de charge au point } \mathbf{r} \text{ (en } \text{C m}^{-1}\text{)}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad \sigma(\mathbf{r}) \equiv \text{densité surfacique de charge au point } \mathbf{r} \text{ (en } \text{C m}^{-2}\text{)}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \rho(\mathbf{r}) \equiv \text{densité volumique de charge au point } \mathbf{r} \text{ (en } \text{C m}^{-3}\text{)}$$

Loi de Coulomb

- E1. Une barre de longueur L porte une charge Q répartie uniformément sur toute sa longueur. Calculez la force exercée par cette barre chargée sur une charge ponctuelle q placée à une distance ρ de la barre dans le plan de symétrie. Calculez le potentiel électrique dans ce plan.

Solution :
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\rho\sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}} \mathbf{e}_\rho$$
$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \operatorname{arcsch} \left(\frac{L}{2\rho} \right)$$

- E2. Un disque de rayon R situé dans le plan $x - y$ porte une charge Q répartie uniformément sur toute sa surface. Calculez la force exercée par ce disque chargé sur une charge ponctuelle q placée en $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ sur l'axe de symétrie du disque (Oz). Calculez le potentiel électrique sur cet axe.

Solution :
$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \mathbf{e}_z$$
$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right)$$

Loi de Coulomb

- E3. En coordonnées sphériques, un champ vectoriel \mathbf{E} a pour expression $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_r + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \mathbf{e}_\varphi)/r$. Ce champ peut-il correspondre au champ électrique généré par une distribution de charges statiques ? Si oui, quelle est cette distribution ?

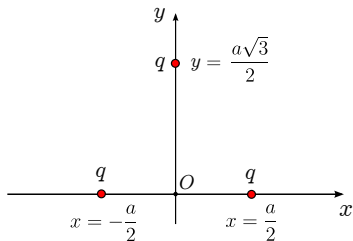
Solution : Oui. $\rho(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{r^2} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta} \right)$

- E4. Une sphère de rayon R , centrée sur l'origine, a sa moitié supérieure ($z > 0$) chargée uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ . Calculez la différence de potentiel électrique entre le point P de coordonnées cartésiennes $(0, 0, R)$ et l'origine.

Solution : $V(P) - V(O) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} (\sqrt{2} - 1)$

Loi de Coulomb

E5. Calculez le potentiel et le champ électrique au point $\mathbf{r}_0 = (a, a\sqrt{3}/2, 0)$ créé par le système de charges ponctuelles représenté sur la figure ci-contre. Calculez le travail fourni par la force de Coulomb suite au déplacement d'une charge q' du point \mathbf{r}_0 à l'origine O . Calculez l'énergie électrostatique de la distribution de charges.



Solution : $V(\mathbf{r}_0) = \frac{(6 + \sqrt{3})q}{12\pi\epsilon_0 a}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{q}{24\pi\epsilon_0 a^2} (9 + \sqrt{3}, 1 + 3\sqrt{3}, 0)$$

$$W_{\text{Coulomb}} = -\frac{(6 + \sqrt{3})qq'}{12\pi\epsilon_0 a}$$

$$U = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Loi de Coulomb / Loi de Gauss

E6. Un plan infini ($x - y$) est chargé uniformément avec une densité surfacique de charge σ . Calculez le champ électrique en tout point de l'espace.

Solution : $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_z$

E7. Un condensateur plan est formé de deux plans ($x - y$) de densités de charges opposées $\pm\sigma$ qui se font face. Calculez le champ électrique en tout point de l'espace.

Solution : $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z$ entre les plans et est nul ailleurs.

E8. Un fil infini est chargé uniformément avec une densité linéique de charge λ . Calculez le champ électrique en tout point de l'espace.

Solution : $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho$

E9. Un cylindre infini de rayon R est chargé uniformément en volume avec une densité volumique de charge ρ_0 . Calculez le champ électrique en tout point de l'espace.

Solution : $\mathbf{E} = \frac{\rho_0\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_\rho$ à l'intérieur du cylindre, $\mathbf{E} = \frac{R^2\rho_0}{2\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho$ en dehors.

Développement multipolaire

E10. Une sphère de rayon R est chargée en surface avec une densité surfacique de charge $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \cos \theta$. Calculez la charge totale et le moment dipolaire électrique de cette distribution de charges. En déduire une expression pour le potentiel électrique à grande distance ($r \gg R$).

Solution : $q = 0$, $\mathbf{p} = (4\pi/3)R^3\sigma_0 \mathbf{e}_z$, $V(\mathbf{r}) = \frac{R^3\sigma_0}{3\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{R^3}{r^3}\right)$

E11*. On considère un ensemble de 4 charges ponctuelles : deux charges $+q$ en $\mathbf{r} = (\pm a, 0, 0)$ et deux charges $-q$ en $\mathbf{r} = (0, \pm a, 0)$. Calculez la charge totale, le moment dipolaire électrique et les composantes du tenseur quadripolaire de cette distribution de charges. En déduire une expression pour le potentiel électrique à grande distance ($r \gg a$).

Solution : $Q = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $V(\mathbf{r}) = \frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x^2 - y^2}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{a^4}{r^4}\right)$

Énergie électrostatique

E12. Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 de même signe, initialement au repos, sont séparées d'une distance d . Calculez la vitesse des deux charges ponctuelles après un temps infini (on négligera l'émission de rayonnement par les charges).

Solution : $v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2$, $v_2 = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{2}{m_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}$

E13. Une boule isolante de rayon R porte une charge totale Q répartie uniformément dans tout le volume. Calculez l'énergie potentielle de la boule.

Solution : $U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

E14. Une coquille sphérique de rayon R est chargée uniformément sur toute sa surface avec une densité surfacique de charge σ . Calculez l'énergie potentielle de la coquille.

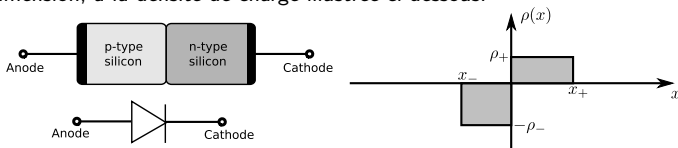
Solution : $U = \frac{2\pi R^3 \sigma^2}{\epsilon_0}$

E15. Un électron, situé dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = x^2 \mathbf{e}_x$, est initialement à la position $\mathbf{r}_i = (1, 2, 0)$ avec une vitesse de module v_i . Que vaut v_f , le module de sa vitesse, à la position $\mathbf{r}_f = (2, 4, 1)$?

Solution : $v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{14e}{3m_e}}$ avec e la charge élémentaire.

Jonction p-n

E16*. Une diode est un élément électronique composé d'un cristal de silicium isolant dopé avec des impuretés rajoutant des porteurs de charge libres. La zone p est porteuse de trous (charge positive) tandis que la zone n est porteuse d'électrons (charge négative). Une fois la mise en contact des deux zones, la migration des porteurs donne lieu, à une dimension, à la densité de charge illustrée ci-dessous.



- Justifiez la densité de charge de la figure
- Calculez le champ et le potentiel électrique le long de l'axe x ?

Solution : ● $V(x) = 0$ si $x < x_-$, $V(x) = \frac{\rho_-}{2\epsilon_0} x^2 - \frac{\rho_- x_-}{\epsilon_0} x + \frac{\rho_- x_-^2}{2\epsilon_0}$ si

$$x_- \leq x < 0, V(x) = -\frac{\rho_+}{2\epsilon_0} x^2 + \frac{\rho_+ x_+}{\epsilon_0} x + \frac{\rho_- x_-^2}{2\epsilon_0} \text{ si}$$

$$0 \leq x < x_+ \text{ et } V(x) = \frac{\rho_+ x_+}{2\epsilon_0} (x_+ - x_-) \text{ si } x > x_+$$

● $E(x) = 0$ si $x < x_-$ ou $x > x_+$, $E(x) = -\frac{\rho_- x}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_- x_-}{\epsilon_0}$ si

$$x_- \leq x < 0 \text{ et } E(x) = \frac{\rho_+}{\epsilon_0} x + \frac{\rho_- x_-}{\epsilon_0} \text{ si } 0 \leq x < x_+$$

III

Magnétostatique

Rappels de magnétostatique

Force magnétique : $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ avec $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$

Champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ et potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C d\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Densité de courant : $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r})$, Courant : $I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$

Énergie magnétique : $U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 dV$

Dipôle magnétique ponctuel : $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right)$

Moment dipolaire magnétique : $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV$

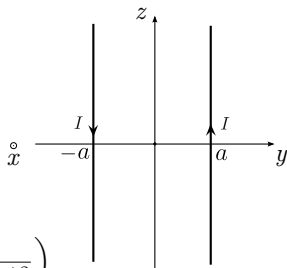
$\mathbf{m} = I S \mathbf{n}$ pour une boucle de courant plane

Loi de Biot et Savart

M1. Calculez le champ magnétique produit par le passage d'un courant constant d'intensité I dans un fil rectiligne infiniment long.

Solution : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi$

M2. Deux fils *infinis* parallèles, séparés d'une distance $2a$, sont parcourus par des courants opposés d'intensité I (voir figure). Calculez le champ magnétique en tout point de l'espace



Solution : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (B_x, B_y, 0)$ où

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a - y}{x^2 + (y - a)^2} + \frac{a + y}{x^2 + (y + a)^2} \right)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + (y - a)^2} - \frac{x}{x^2 + (y + a)^2} \right)$$

Loi de Biot et Savart

- M3. Considérez une boucle circulaire de rayon R (dans le plan xy) parcourue par un courant constant d'intensité I . Calculez le champ magnétique généré par cette boucle en tout point de l'axe de symétrie.

Solution : $\mathbf{B}(\mathbf{r} = z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$

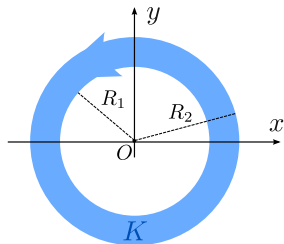
- M4. Une bobine de Helmholtz est constituée de deux boucles circulaires parallèles, de rayon R , situées en $z = \pm a/2$ et parcourues par un courant constant d'intensité I . Déterminez la séparation optimale a entre les deux boucles de manière à obtenir un champ magnétique le long de l'axe z le plus uniforme possible aux alentours de l'origine.

Solution : $a = R$

Loi de Biot et Savart

- M5. Calculez le champ magnétique au point O produit par le passage d'un courant surfacique constant (densité surfacique K) au travers du ruban circulaire représenté ci-contre.

Solution : $\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 K}{2} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \mathbf{e}_z$



- M6. Un ruban de largeur L et de longueur infinie, situé dans le plan $x - y$ et parallèle à l'axe \mathbf{e}_x , est parcouru par un courant constant d'intensité I s'écoulant vers les $x < 0$. Calculez le champ magnétique en tout point de l'axe Oz traversant le ruban en son milieu.

Solution : $\mathbf{B}(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \operatorname{arctg} \left(\frac{L}{2z} \right) \mathbf{e}_y$

Loi de Biot et Savart et loi d'Ampère

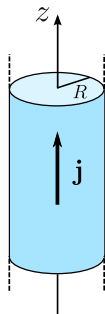
M7*. Calculez le champ magnétique sur l'axe de symétrie d'un solénoïde parcouru par un courant constant d'intensité I . Le solénoïde possède N spires de rayon R sur une longueur totale L .

$$\text{Solution : } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{x-L}{\sqrt{R^2 + (x-L)^2}} \right] \mathbf{e}_x$$

où $n = N/L$ est le nombre de spires par mètre.

M8. Calculez le champ magnétique en tout point de l'espace créé par un cylindre *infini* de rayon R parcouru par une densité de courant constante $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j \mathbf{e}_z$.

$$\text{Solution : } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi & \rho \geq R \\ \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi & \rho < R \end{cases} \quad \text{où } I = \pi R^2 j$$

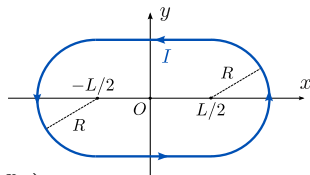


Développement multipolaire

M9. Calculez le moment dipolaire magnétique de la boucle de courant représentée ci-contre. Déduisez-en l'expression du champ magnétique à grande distance ($r \gg R, L$).

Solution : $\mathbf{m} = IR(2L + \pi R) \mathbf{e}_z$

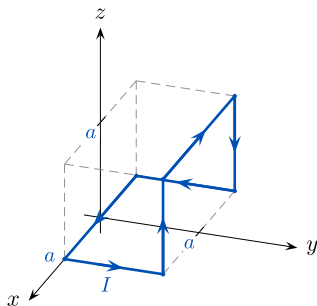
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 IR(2L + \pi R)}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{e}_z}{r^3} + 3\frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right)$$



M10. Calculez le moment dipolaire magnétique de la boucle de courant représentée ci-contre. Déduisez-en l'expression du champ magnétique à grande distance ($r \gg a$).

Solution : $\mathbf{m} = I2a^2(0, -1, 1)$

$$\mathbf{B} = \frac{I\mu_0 2a^2}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z}{r^3} + 3\frac{-y + z}{r^5} \mathbf{r} \right)$$



Force magnétique

M11. Dans trois expériences réalisées séparément, des particules chargées sont envoyées avec une vitesse connue dans une région de champ magnétique homogène. Les résultats de mesures donnent

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e}_x \quad \mathbf{F}_1 = 2q_1 v_1 B_0 (\mathbf{e}_z - 2\mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{v}_2 = v_2 \mathbf{e}_y \quad \mathbf{F}_2 = q_2 v_2 B_0 (4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z)$$

$$\mathbf{v}_3 = v_3 \mathbf{e}_z \quad \mathbf{F}_3 = q_3 v_3 B_0 (\mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_x)$$

Déterminez le champ magnétique \mathbf{B} .

Solution : $\mathbf{B} = B_0 (\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)$

M12. Une charge ponctuelle q_1 de vitesse \mathbf{v}_1 ($v_1 \ll c$) produit un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{e}_r}{r^2}$ où \mathbf{e}_r est un vecteur unitaire qui pointe de q_1 vers \mathbf{r} . Montrez que la force magnétique sur une seconde charge q_2 , de vitesse \mathbf{v}_2 , est donnée par $\mathbf{F}_{1/2}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{e}_r)$. Calculez la force $\mathbf{F}_{2/1}$ de q_2 sur q_1 . A-t-on $\mathbf{F}_{1/2} = -\mathbf{F}_{2/1}$?

Solution : Seulement dans le cas où les charges se déplacent selon des trajectoires parallèles côte à côte.

Potentiel vecteur et champ magnétique

M13. Calculez le champ magnétique associé au potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \mathbf{e}_z$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance par rapport à l'axe Oz . Quelle densité de courant est à l'origine de ce champ magnétique ?

Solution : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi$, soit le champ magnétique généré par un fil infini parcouru par un courant constant d'intensité I .

M14. Calculez le champ magnétique associé au potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_0 \mathbf{e}_\varphi$$

Quelle densité de courant est à l'origine de ce champ magnétique ?

Solution : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{\rho} \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{\mu_0 \rho^2} \mathbf{e}_\varphi$

IV

Électrodynamique

Rappels d'électrodynamique

Force de Lorentz : $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$ (référentiels inertiels)

Équation de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{ Gauss })$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{monopôles magnétiques} \\ \text{jamais observés} \end{array} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{ Faraday })$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{ Ampère-Maxwell })$$

Potentiels électromagnétiques et transformation de jauge :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Rappels d'électrodynamique

Remarque : les dépendances spatiale et temporelle des champs sont implicites

$$\text{Densité d'énergie élm. : } u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \quad [\text{J/m}^3]$$

$$\text{Densité d'impulsion élm. : } \mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \quad [\text{kg.s/m}^2]$$

$$\text{Vecteur de Poynting. : } \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad [\text{J/m}^2.\text{s}]$$

Champs radiatifs :

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)}{c} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi$$

où $\mathbf{p}(t_r) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t_r) \mathbf{r} dV$ est le moment dipolaire électrique de la distribution de charges évalué au temps retardé $t_r = t - r/c$, et l'axe z est dans la direction de $\ddot{\mathbf{p}}(t_r) = \ddot{p}(t_r) \mathbf{e}_z$.

Transformations de jauge

ED1. Montrez que les potentiels vecteurs

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (B_0/2)(-y, x, 0)^T \quad (\text{jauge symétrique})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B_0(0, x, 0)^T \quad (\text{jauge de Landau})$$

décrivent tous deux un champ magnétique homogène selon Oz d'intensité B_0 .
 Trouvez une transformation de jauge qui relie $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$.

Solution : $\chi(\mathbf{r}) = \frac{B_0}{2}xy + C$

ED2. La jauge axiale est définie par $V(\mathbf{r}, t) = 0$. Montrez qu'il est toujours possible de se placer en jauge axiale, et qu'en l'absence de charges, les conditions de jauge axiale et de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) peuvent être choisies simultanément (jauge de radiation).

ED3. Soient les potentiels $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (x e^{-\Gamma t}, 0, 0)$ et $V(\mathbf{r}, t) = 0$. Donnez l'expression de potentiels équivalents vérifiant la condition de jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) ou de jauge de Lorentz ($\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \partial_t V$).

Solution : Ces deux jauges ne fixent pas les potentiels de manière univoque. Une solution possible est :

$$\mathbf{A}_{\text{Coulomb}} = 0, V_{\text{Coulomb}} = -(\Gamma x^2/2) e^{-\Gamma t},$$

$$\mathbf{A}_{\text{Lorentz}} = x e^{-\Gamma t}, V_{\text{Lorentz}} = (c^2/\Gamma) e^{-\Gamma t}.$$

Ondes électromagnétiques

ED4. Trouvez des potentiels $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $V(\mathbf{r}, t)$ qui décrivent une onde électromagnétique monochromatique plane ($\omega = kc$),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \frac{\mathbf{E}_0}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Solution : $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E}_0}{\omega} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ et $V(\mathbf{r}, t) = 0$ (à une transformation de jauge près).

ED5. Soient les potentiels électromagnétiques

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t)] \quad \text{et} \quad V(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{où} \quad \mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r},$$

où $\Re[\cdot]$ désigne la partie réelle, $\omega = kc$ et \mathbf{A}_0 est un vecteur réel constant. Calculez les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ correspondants ainsi que le vecteur de Poynting associé à ces champs. Montrez que ces champs représentent une onde électromagnétique dont l'intensité ne dépend pas de la direction mais seulement de la distance par rapport à l'origine.

Solution : $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re[(\mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{r}) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)],$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[i\omega \mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t)] \quad \text{et}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\omega \sin(kr - \omega t)}{\mu_0 r} \left(\frac{\cos(kr - \omega t)}{r^2} + \frac{k \sin(kr - \omega t)}{r} \right) (A_{0,r} \mathbf{A}_0 - A_0^2 \mathbf{e}_r).$$

Équations de Maxwell

ED6. Trouvez les champs et les distributions de charge et de courant qui correspondent aux potentiels $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$, $V(\mathbf{r}, t) = 0$.

Utilisez ensuite la fonction de jauge $\chi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r}$ pour transformer ces potentiels. Discutez.

Solution : $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$, et $\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$, ce qui correspond à une charge ponctuelle au repos à l'origine du système de coordonnées.

ED7. On considère les champs

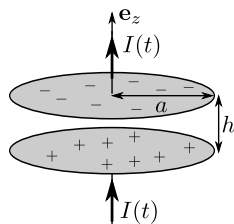
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \theta(vt - r), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Montrez que ces champs satisfont aux équations de Maxwell et calculez les sources correspondantes.

Solution : $\rho(\mathbf{r}, t) = -q\delta(\mathbf{r})\theta(t) + \frac{q}{4\pi r^2} \delta(vt - r)$,
 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{qv\mathbf{r}}{4\pi r^3} \delta(vt - r)$.

Energie électromagnétique

ED8*. Soit un condensateur constitué de deux plaques circulaires de rayon a espacées d'une distance $h \ll a$. Sous l'action d'un courant $I(t)$, les plaques du condensateur acquièrent une densité surfacique de charge $\pm\sigma(t)$ donnant lieu à un champ électrique homogène de module $E(t) = \sigma(t)/\epsilon_0$ au sein du condensateur. On suppose une charge lente, c'est-à-dire $|dI(t)/dt| \approx 0$. Calculez l'énergie électromagnétique à l'intérieur du condensateur en fonction du temps ainsi que sa variation temporelle. Calculez le vecteur de Poynting et le flux d'énergie accumulée par le condensateur.



Solution :
$$U_{em}(t) = \pi a^2 h \frac{\sigma(t)^2}{2\epsilon_0} + \pi h a^4 \frac{\mu_0}{16} \left(\frac{I(t)}{S} \right)^2$$

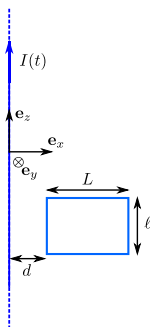
$$\frac{dU_{em}(t)}{dt} = \Phi_{em}(t) = \pi a^2 h \epsilon_0 E(t) \frac{dE(t)}{dt}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\epsilon_0 a}{2} E(t) \frac{dE(t)}{dt} \mathbf{e}_\rho$$

Variation de flux magnétique

ED9*. Un cadre métallique rectangulaire contenu dans le plan $x - y$, de dimension $L \times \ell$, est placé à une distance d d'un fil électrique infini le long de l'axe e_z parcouru par un courant lentement variable $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$.

- Calculez le flux magnétique au travers du cadre métallique.
- Déterminez la force électromotrice générée dans le cadre métallique.



Solution : $\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi,$

$$\Phi_{\mathbf{B}}(t) = \frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{d+L}{d}\right),$$

$$\mathcal{E}_{\text{stat}}(t) = -\frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi} \omega \cos(\omega t) \ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

Source radioactive

ED10. Une source radioactive ponctuelle, initialement neutre (en $t = 0$) et située à l'origine, émet Γ électrons d'énergie E_{e^-} par seconde, de façon radiale et isotrope (rayonnement β^-). L'énergie avec laquelle les électrons sont émis est supposée grande par rapport à l'attraction électrostatique entre le noyau et les électrons émis. On négligera également l'action des forces électromagnétiques entre les électrons émis.

- Quand les électrons se trouvant à une distance r de la source ont-ils été émis ?
- Déduisez-en la densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ du système et montrez que la densité de courant est donnée par

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} -\frac{\Gamma e}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r & \text{si } r < v_{e^-} t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Déterminez le champ électrique en tout point de l'espace en tenant compte de la charge ponctuelle positive (dépendante du temps) à l'origine.
- Déterminez le champ magnétique en tout point de l'espace.
- Calculez le vecteur de Poynting.

Source radioactive

Solution : $\mathbf{v}_{e^-} = \sqrt{2E_{e^-}/m} \mathbf{e}_r$,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\Gamma t \delta(\mathbf{r}) - \frac{e\Gamma}{4\pi r^2} \frac{1}{v_{e^-}} \theta(v_{e^-} t - r),$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e\Gamma t}{r^2} - \frac{e\Gamma}{rv_{e^-}} \right) \mathbf{e}_r & \text{si } r \leq v_{e^-} t \\ 0 & \text{si } r > v_{e^-} t \end{cases}.$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Rayonnement dipolaire

ED11. Un électron est lâché d'une hauteur $h = 1$ m. Que vaut le rapport entre l'énergie électromagnétique rayonnée et l'énergie potentielle gravifique perdue par l'électron lors de sa chute ?

Solution :

$$\frac{\Delta U_{\text{rad}}}{\Delta U_g} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \sqrt{\frac{2g}{h}} \approx 2.528 \times 10^{-53} \ll 1.$$

ED12. Déterminez la durée de vie classique de l'atome d'hydrogène. Dans ce but, considérez que l'électron parcourt initialement un trajectoire circulaire de rayon $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m autour du noyau. La durée de vie classique de l'atome d'hydrogène est donnée par le temps que met l'électron pour dissiper toute son énergie sous forme de rayonnement électromagnétique.

Solution :

$$t_H = \frac{c^3}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m_e}{e^2} \right)^2 a_0^3 = 1.56 \times 10^{-11} \text{ s!}$$

v

Relativité restreinte

Notions de relativité restreinte

Soient deux référentiels inertiels K et K' d'axes parallèles. Lorsque K' se déplace à vitesse \mathbf{v} par rapport à K , les composantes du quadrivecteur $A_\alpha = (A_t, \mathbf{A})$ exprimées dans K deviennent dans K' après transformation de Lorentz

$$\begin{cases} A'_t &= \gamma(A_t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \gamma \boldsymbol{\beta} A_t + (\gamma - 1)(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) \boldsymbol{\beta} / \beta^2 \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\beta = v/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Dans le cas particulier d'un boost avec $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, on a

$$\begin{cases} A'_t &= \gamma(A_t - \beta A_x) \\ A'_x &= \gamma(A_x - \beta A_t) \\ A'_y &= A_y \\ A'_z &= A_z. \end{cases}$$

Loi de composition des vitesses (pour des vitesses parallèles dirigées selon \mathbf{e}_x)

$$u'_x = \frac{u_x + v_x}{1 + v_x u_x / c^2}.$$

Notions de relativité restreinte

Soient deux référentiels inertiels K et K' d'axes parallèles. Lorsque K' se déplace à vitesse \mathbf{v} par rapport à K , le champ électromagnétique subit la transformation

$$\begin{cases} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \gamma^2\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})/(\gamma + 1) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c) - \gamma^2\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})/(\gamma + 1) \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\beta = v/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Dans le cas particulier d'un boost avec $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, on a

$$\begin{cases} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - c\beta B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + c\beta B_y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y/c). \end{cases}$$

Transformation de Lorentz des champs électromagnétiques

RR1. Calculez les champs électrique et magnétique créés par une particule ponctuelle de charge q qui se déplace uniformément avec une vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$.

Solution :

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x - vt, y, z)$$

et

$$\mathbf{B} = \frac{v\gamma q}{4\pi\epsilon_0 c^2 (\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (0, -z, y)$$

avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ et où t , x , y et z sont mesurés dans le référentiel du laboratoire.

RR2. Montrez que $E^2 - c^2 B^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ sont invariants sous l'effet d'une transformation de Lorentz.

Transformation de Lorentz des champs électromagnétiques

RR3. Dans un référentiel immobile K , un fil conducteur infini cylindrique de rayon R est parcouru par un courant d'intensité I dirigé dans le sens du vecteur de base \mathbf{e}_x et porte une densité de charge nette nulle. Ce courant est produit par le déplacement à vitesse U d'électrons répartis uniformément dans le fil. Un second référentiel K' se déplace à vitesse v parallèlement au fil. Les vitesses U et v doivent être traitées de manière relativiste.

- 1 Déterminez les champs électrique et magnétique dans K' .
- 2 Déterminez la densité de charge nette perçue dans K' .
- 3 Calculez la vitesse des électrons et des ions telle que perçue dans K' .
- 4 Comment expliquez-vous que dans K' , on perçoit une densité de charges non-nulle ?

Transformation de Lorentz des champs électromagnétiques

Solution :

- ① En posant $\rho' = \sqrt{y'^2 + z'^2}$, $\mathbf{e}_{\rho'} = (0, y', z')/\rho'$,
 $\mathbf{e}_{\varphi'} = (0, -z', y')/\rho'$ et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, les
champs sont donnés par

$$\mathbf{E}' = \begin{cases} -\frac{\gamma v \mu_0 I}{2\pi \rho'} \mathbf{e}_{\rho'} & \rho' \geq R \\ -\frac{\gamma v \mu_0 I \rho'}{2\pi R^2} \mathbf{e}_{\rho'} & \rho' < R \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = \begin{cases} \frac{\gamma \mu_0 I}{2\pi \rho'} \mathbf{e}_{\varphi'} & \rho' \geq R \\ \frac{\gamma \mu_0 I \rho'}{2\pi R^2} \mathbf{e}_{\varphi'} & \rho' < R \end{cases}$$

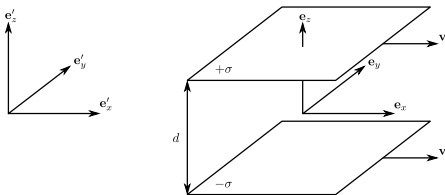
$$\textcircled{2} \rho'_{\text{net}} = \begin{cases} 0 & \rho' \geq R \\ -\frac{\gamma v I}{\pi c^2 R^2} & \rho' < R \end{cases}$$

$$\textcircled{3} v'_{e,x} = -\frac{U+v}{1+vU/c^2} \quad \text{et} \quad v'_{i,x} = -v$$

- ④ Dans le référentiel K' , la densité de charges des électrons $\rho'_e = -\gamma \left(\frac{I}{\pi R^2 U} + \frac{vI}{\pi R^2 c^2} \right)$ n'est pas égale à la densité de charges des ions $\rho'_i = \gamma \frac{I}{\pi R^2 U}$. On a bien $\rho'_{\text{net}} = \rho'_e + \rho'_i$.

Transformation de Lorentz des champs électromagnétiques

RR4. Deux plaques isolantes infinies séparées d'une distance d et parallèles au plan $x - y$ se déplacent ensemble à vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. Dans le référentiel attaché aux plaques, la plaque du dessus est chargée avec une densité de charge surfacique $+\sigma$ et celle du dessous avec une densité $-\sigma$.



Déterminez l'amplitude et la direction des champs électrique et magnétique entre les plaques pour un observateur au repos.

Solution : $\mathbf{E}' = -\frac{\gamma\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{z'}$ et $\mathbf{B}' = \frac{\gamma v\sigma}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_{y'}$ avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

VI

Annexes

Dérivées de champs scalaires et vectoriels

AC1. Démontrez que les règles usuelles de dérivation d'un produit (règles de Leibniz) s'appliquent au produit scalaire et au produit vectoriel, i.e.

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

AC2*. Démontrez que la dérivée d'un champ scalaire $V(\mathbf{r})$ dans la direction \mathbf{n} ,

$$\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial n} \equiv \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{r} + \Delta n \mathbf{n}) - V(\mathbf{r})}{\Delta n}$$

est égale à $\nabla V(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$.

Loi de Coulomb

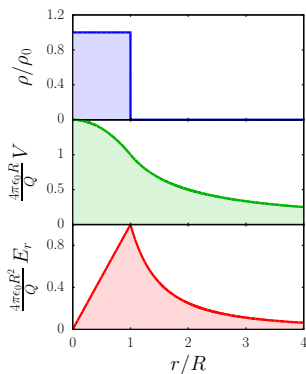
AE1*. Une surface carrée de côté a , contenue dans le plan $z = 0$ et centrée sur l'origine, est chargée uniformément en surface avec une densité surfacique de charge σ . Calculez le champ électrique en tout point de l'axe Oz . Considérez la limite $a \rightarrow \infty$ et la limite $z \gg a$.

Solution :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r} = z \mathbf{e}_z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{az}{(y'^2 + z^2)\sqrt{y'^2 + z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} dy' \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{2z^2}} \right) - 1 \right] \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Loi de Coulomb / Loi de Gauss

AE2. Calculez le potentiel et le champ électrique créé par une sphère de rayon R chargée *uniformément* en volume avec une densité de charge ρ_0 .



Potentiel électrique :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & r > R \end{cases}$$

Champ électrique :

$\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{r}/r$ avec

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$$

où $Q = (4\pi/3)R^3\rho_0$ est la charge totale.

Équation de Poisson

AE3*. Le potentiel électrique créé par un atome d'hydrogène neutre est de la forme

$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$. Déterminez la distribution de charge correspondante et donnez une interprétation à votre résultat.

Solution : $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{q\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$, soit une charge ponctuelle positive (proton) et une charge diffuse négative (nuage électronique).

AE4*. On considère un modèle d'atome neutre dont la distribution de charges crée

le potentiel électrique $V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}$ (potentiel de Yukawa). Déterminez le champ électrique et la distribution de charges à l'origine de ce potentiel électrique.

Solution : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q(r+a)e^{-r/a}}{4\pi\epsilon_0 ar^2} \mathbf{e}_r$, $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) - \frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-r/a}$

Énergie électrostatique

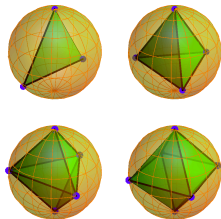
AE5*. Estimez l'énergie électrostatique d'une paire d'ions dans un cristal unidimensionnel, où les ions positifs et négatifs de charge $q = \pm e$ sont séparés d'un pas a . Suggestion : calculez le travail à fournir pour ajouter une paire d'ions à une extrémité du cristal et utilisez le développement en série du logarithme :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Solution : $U_{\text{paire}} = -\frac{e^2 \ln 2}{2\pi\epsilon_0 a}$

AE6*. Problème de Thomson.

Sous l'effet de la répulsion électrostatique, N électrons placés sur une sphère conductrice de rayon R se répartissent de manière à minimiser l'énergie potentielle totale. Calculez cette énergie potentielle minimale pour $N = 3 - 6$. Les configurations d'équilibre, illustrées ci-contre, sont respectivement un triangle, un tétraèdre, une bipyramide triangulaire et un octaèdre.



Solution : $U = \frac{\alpha_N e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ avec $\alpha_3 = \sqrt{3}$, $\alpha_4 = 3\sqrt{3/2}$, $\alpha_5 = 1/2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\alpha_6 = 3/2 + 6\sqrt{2}$

Méthode des images

AE7*. Calculez la densité de charges induites sur un plan conducteur infini ($x-z$) relié à la terre lorsqu'une charge ponctuelle q est placée sur l'axe Oy à une distance a du plan.

Solution : $\sigma(\rho) = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}}$ où $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$

AE8*. Un plan conducteur infini ($x-z$) est relié à la terre. On place sur l'axe Oy une charge $-2q$ à une distance a du plan ainsi qu'une charge $+q$ à une distance $3a$ du plan. Calculez la force totale qui s'exerce sur la charge $+q$.

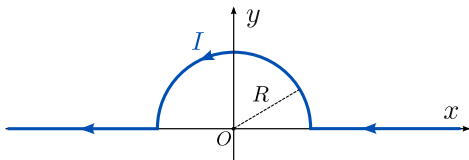
Solution : $\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{29q^2}{72a^2} \right) \mathbf{e}_y$

AE9*. Calculez la densité de charges induites sur une coquille sphérique conductrice de rayon R reliée à la terre lorsqu'une charge ponctuelle q est placée sur l'axe Oz à une distance $a > R$ du centre de la sphère.

Solution : $\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{q(a^2 - R^2)}{4\pi R |\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|^3}$ où $\mathbf{r} \in$ surface de la sphère

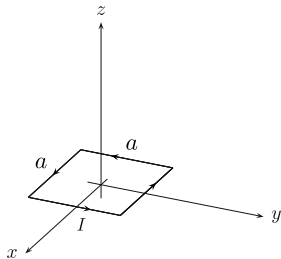
Loi de Biot et Savart

AM1. Calculez le champ magnétique au point O produit par le passage d'un courant constant d'intensité I au travers du fil représenté ci-dessous.



Solution : $\mathbf{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{e}_z$

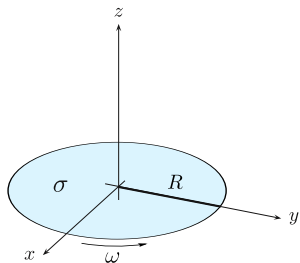
AM2. Une boucle carrée de coté a est parcourue par un courant constant d'intensité I . Calculez le champ magnétique créé par la boucle en tout point de l'axe z .



Solution : $\mathbf{B}(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2 \mathbf{e}_z}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \sqrt{\frac{a^2}{2} + z^2}}$

Loi de Biot et Savart

AM3. Un disque de rayon R chargé uniformément en surface (avec une densité superficielle de charge σ) est porté en rotation à la vitesse angulaire ω . Déterminez le champ magnétique créé par le disque en tout point de l'axe z . Pour rappel, le champ de vitesse est donné par $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (avec ici $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$).



$$\text{Solution : } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| \right] \mathbf{e}_z$$

AM4. Un cylindre de hauteur L et de rayon R , chargé uniformément sur toute sa surface latérale, est mis en rotation à la vitesse angulaire ω . Calculez le champ magnétique sur l'axe de rotation (Oz) du cylindre.

$$\text{Solution : } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R \omega}{2} \left[\frac{L - 2z}{\sqrt{4R^2 + (L - 2z)^2}} + \frac{L + 2z}{\sqrt{4R^2 + (L + 2z)^2}} \right] \mathbf{e}_z$$

Rayonnement électromagnétique

AED1*. Une particule de charge q parcourt une trajectoire circulaire $\mathbf{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$ de rayon R dans le plan $x - y$ à la vitesse angulaire ω . Calculez le vecteur de Poynting qui donne la distribution angulaire du rayonnement émis par la particule.

Solution : $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2 R^2 \omega^3}{\epsilon_0^2 \mu_0 16\pi c^5 r^2} (1 + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r$ ou θ est l'angle entre l'axe Oz et la direction d'émission du rayonnement et r est la distance entre l'origine et le point où le vecteur de Poynting est évalué.

Approximation quasi-statique

AED2. Soit l'expression exacte du champ magnétique pour une densité de courant arbitraire variable dans le temps $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'$$

Montrez que cette expression redonne la loi de Biot-Savart au temps t (et non au temps retardé $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

lorsque la densité de courant varie lentement, c'est-à-dire peut être approchée par le développement limité au premier ordre :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + (t_r - t) \partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Potentiels retardés

AED3*. Vérifiez que les potentiels retardés

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

sont solutions des équations d'onde (avec $\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$)

$$\square V(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

et obéissent à la condition de jauge de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$