

Électromagnétisme

John MARTIN



I.P.N.A.S., bât. B15
Tél.: 04/366 28 64
email: jmartin@uliege.be

2019–2020

Table des matières I

Préambule	6
Calcul vectoriel	8
Scalars et pseudoscalaires. Vecteurs polaires et axiaux	18
Gradient	21
Développement en série de Taylor	23
Circulation et flux d'un champ vectoriel	24
Divergence	27
Rotationnel	28
Théorèmes de Gauss et de Stokes	29
Laplacien	31
Formulaire de calcul vectoriel	32
Calcul intégral et différentiel	34
Champs transverses et longitudinaux	39
Champs centraux	44
Mécanique du point matériel	45
Ligne du temps	46
Quelques citations...	47
La charge électrique	49
Loi de Coulomb	51
Densité de charge	52
Champ électrostatique et loi de Gauss	53
Potentiel électrique	56
Équation de Poisson	60
« Fonction » delta de Dirac	64
Électrostatique : l'essentiel	68
Énergie potentielle d'un dipôle électrique	74

Table des matières II

Discontinuités du champ électrique	78
Conducteurs	79
Milieux diélectriques	82
Champ magnétique	90
Loi de Biot et Savart	95
Potentiel vecteur	97
Loi d'Ampère	98
Magnétostatique : l'essentiel	99
Électrostatique – magnétostatique	100
Force magnétique	101
Développement multipolaire magnétostatique	102
Dipôle magnétique	103
Discontinuités du champ magnétique	105
Énergie potentielle d'un dipôle magnétique	106
Milieux magnétiques	107
Retour sur la loi de Gauss	113
Loi d'induction de Faraday	115
Inductance	118
Énergie magnétique	120
Loi d'Ampère-Maxwell	121
Équations de Maxwell	122
Potentiels électromagnétiques	128
Invariance de jauge	129
Ondes électromagnétiques	131
Polarisations	134

Table des matières III

Spectre électromagnétique	138
Potentiels retardés	139
Théorème de Poynting	140
Champs radiatifs	143
Formule de Larmor	149
Champs créés par une charge ponctuelle en MRU	150
Bremsstrahlung et rayonnement synchrotron	151
Principes de relativité	152
Invariance des équations de Maxwell	155
Formulation relativiste des équations de Maxwell	158
Limites de l'électrodynamique classique	162
Moments dipolaires d'un ensemble de charges ponctuelles	165
Jauge de Coulomb	166
Modes d'une cavité électromagnétique	168
Dipôle électrique ponctuel oscillant	171
Maxima et minima d'intensité des champs	172
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	174
Formulation lagrangienne	176
Formulation hamiltonienne	177

Livre de référence :

- Introduction to electrodynamics, D. J. Griffiths, Prentice Hall

Lectures avancées :

- The Feynman Lectures on Physics, R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, Addison-Wesley
- Classical Electrodynamics, J. D. Jackson, John Wiley & Sons
- Théorie des champs, L. Landau & E. Lifchitz, ellipses
- Electricity and magnetism, E. M. Purcell, Berkeley Physics Course

Organisation du cours :

- 30 h théorie, 15 h exercices
- Cours les mardis et mercredis
- Transparents et autres ressources disponibles sur eCampus
- Examen écrit (théorie – 65 %, exercices – 35 %) en juin et en septembre
- Dispense partielle à partir de 12/20 (d'une session à l'autre mais pas d'une année à l'autre)

Le Système International des unités (SI)

Toutes les unités physiques peuvent s'exprimer à partir des unités de base suivantes : le mètre (m), le kilogramme (kg), la seconde (s), l'ampère (A), le kelvin (K), la mole (mol) et le candela (cd).

Grandeur	symbole	unité
Longueur	L, l, ℓ	m
Masse	m, M	kg
Temps	t	s
Force	F	$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Travail	W	$\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
Puissance	P	$\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
Charge	Q, q	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$
Densité de charge	ρ	$\text{C} \cdot \text{m}^{-3} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$
Courant	I	$\text{A} (= \text{C} \cdot \text{s}^{-1})$
Densité de courant	j	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
Champ électrique	E	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1} = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
Potentiel électrique	V	$\text{V} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-3}$
Polarisation	P	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
Déplacement électrique	D	$\text{C} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
Capacité électrique	C	$\text{F} = \text{C} \cdot \text{V}^{-1} = \text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
Flux magnétique	Φ	$\text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
Induction magnétique	B	$\text{T} = \text{Wb} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
Magnétisation	M	$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$
Inductance	L	$\text{H} = \text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

Quelques constantes fondamentales

Grandeur	symbole	valeur	statut
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$	exact
Perméabilité du vide	μ_0	$1.0000000055(15) 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V.s.A}^{-1}.\text{m}^{-1}$	
Permittivité du vide	ϵ_0	$8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$\frac{1}{c^2\mu_0}$
Charge de l'électron	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	exact
Masse de l'électron au repos	m_e	$9.1093837015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	
Rapport $\frac{\text{masse proton}}{\text{masse électron}}$	m_p/m_e	1836.152668(39)	
Nombre d'Avogadro	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	exact
Constante de Faraday	F	$9.648533212... \text{ C.mol}^{-1}$	$N_A e$, exact
Rayon classique de l'électron	r_e	$2.817940325(28) \cdot 10^{-15} \text{ m}$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$	exact
Constante de Planck	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$	exact
Rayon de Bohr	a_0	$0.5291772083(19) \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$\frac{h^2\epsilon_0}{\pi m_e e^2}$

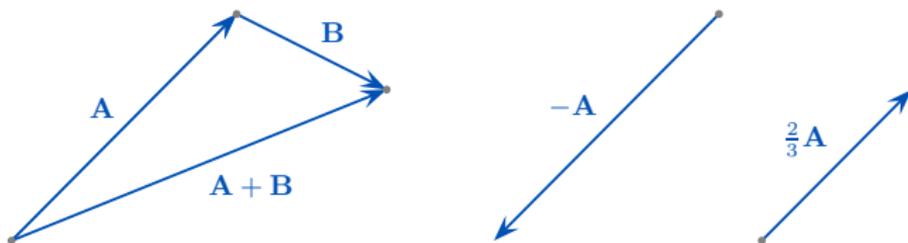
Remarques : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ A}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{V.m}$

$$c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Vecteurs et algèbre vectorielle

Vecteur : entité géométrique intrinsèque définie par une *norme*, une *direction* et un *sens*, et qui obéit aux règles de l'algèbre vectorielle :

- Associativité : $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- Existence d'un neutre : $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- Existence d'un opposé : $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- Commutativité : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- Multiplication par un scalaire : $m\mathbf{A} = (mA_x, mA_y, mA_z)^T$ avec $m \in \mathbb{R}$

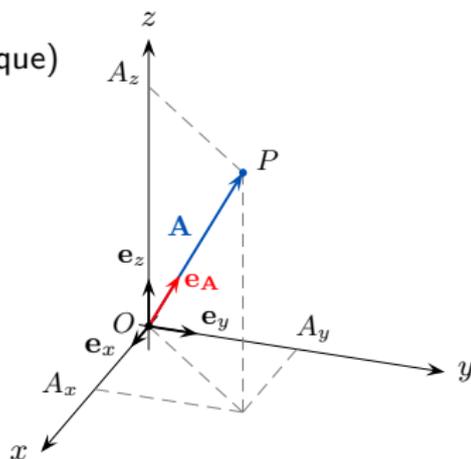


Coordonnées et composantes cartésiennes

- Coordonnées cartésiennes du point P : (x_P, y_P, z_P)
- Décomposition du vecteur $\mathbf{A} = \overrightarrow{OP}$ sur une base cartésienne :

$$\mathbf{A} = x_P \mathbf{e}_x + y_P \mathbf{e}_y + z_P \mathbf{e}_z = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$
- Représentation de \mathbf{A} en termes de composantes cartésiennes :

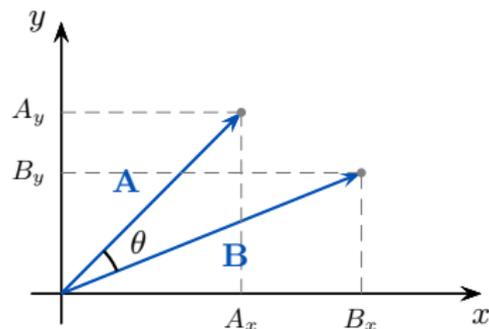
$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)^T$$
- Il faut distinguer le vecteur (objet intrinsèque) de sa représentation en termes de composantes (relatives)
- Norme : $|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
- Vecteur unitaire de mêmes direction et sens que \mathbf{A} : $\mathbf{e}_A = \mathbf{A}/A$



Produit scalaire

Produit scalaire entre deux vecteurs : scalaire

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A_i \quad (i = x, y, z)$
- invariant sous transformations orthogonales (changement de systèmes d'axes orthonormés)

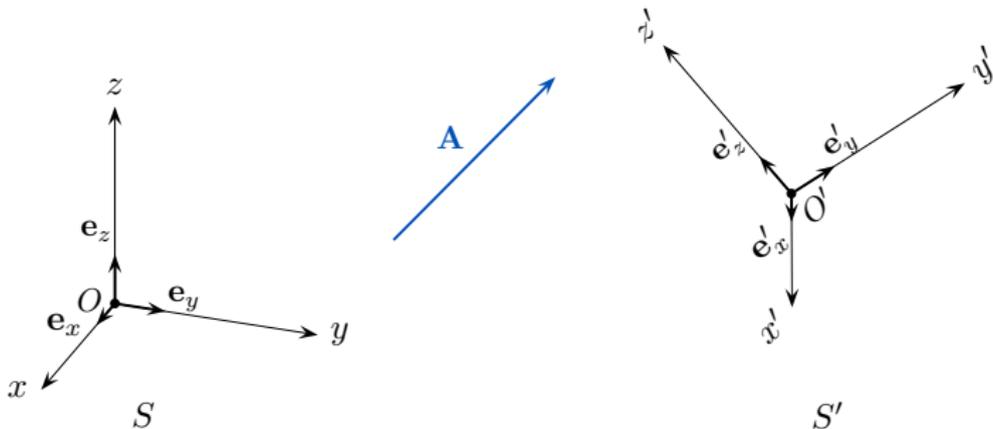


Changement de système d'axes dans \mathbb{R}^3

Soit deux systèmes d'axes cartésiens S et S' qui peuvent différer par des translations, des rotations et des réflexions (ou toute composition de celles-ci). Les composantes dans S et S' d'un même vecteur \mathbf{A} vérifient la loi vectorielle :

$$\boxed{A'_i = \sum_j M_{ij} A_j \quad \Leftrightarrow \quad A_i = \sum_j M_{ji} A'_j}$$

où la matrice M , dite de changement de base, est une matrice orthogonale ($M^T M = \mathbb{1} \Leftrightarrow M^{-1} = M^T$) d'éléments $M_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ ($i, j = x, y, z$).



Tenseur d'ordre 2 dans \mathbb{R}^3

Le concept de tenseur généralise celui de scalaire (tenseur d'ordre 0) et de vecteur (tenseur d'ordre 1). Un tenseur \mathbf{A} d'ordre 2 est une application linéaire qui à tout vecteur \mathbf{v} fait correspondre un vecteur noté $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

Un tenseur d'ordre 2 est un objet intrinsèque qui admet une représentation en termes de composantes (relatives à une base orthonormée $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$)

$$A_{ij} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i, \quad i, j = x, y, z$$

Le "." dans la notation " $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ " désigne l'opération de contraction, agissant selon

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_i = \sum_j A_{ij} v_j$$

pour fournir la composante i du vecteur résultant de l'action de \mathbf{A} sur \mathbf{v} . Le tenseur particulier de composantes $A_{ij} = (\mathbf{e}_k)_i (\mathbf{e}_\ell)_j$ est noté $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_\ell$ où \otimes est le produit tensoriel et vérifie $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})$.

Tout tenseur d'ordre 2 peut se décomposer sous la forme $\mathbf{A} = \sum_{i,j} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

Tenseurs d'ordre 2 dans \mathbb{R}^3

Les composantes A_{ij} d'un tenseur \mathbf{A} d'ordre 2, relatives à une base orthonormée $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ de \mathbb{R}^3 et entrant dans la décomposition

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{avec} \quad A_{ij} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{ou} \quad i, j = x, y, z$$

définissent une matrice de représentation du tenseur

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

Exemples de tenseur d'ordre 2 en physique :

- tenseur d'inertie
- tenseur des contraintes
- tenseur de polarisabilité
- tenseur quadripolaire électrique (voir slide 70)
- tenseur des contraintes de Maxwell (voir slide 141)

Loi tensorielle dans \mathbb{R}^3

Plus généralement, un tenseur d'ordre n est une application linéaire qui à tout vecteur fait correspondre un tenseur d'ordre $n - 1$. Un tenseur d'ordre n est un objet mathématique intrinsèque dont les 3^n composantes cartésiennes (grandeurs relatives), notées $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ($i_1, i_2, \dots, i_n = x, y, z$), se transforment lors d'un changement de système d'axes orthogonaux selon la loi tensorielle :

- Scalaire ou tenseur d'ordre 0 (A) : $A' = A$
- Vecteur ou tenseur d'ordre 1 (\mathbf{A}) : $A'_i = \sum_j M_{ij} A_j$
- Tenseur d'ordre 2 (\mathbf{A}) : $A'_{i_1 i_2} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} A_{j_1 j_2}$
- Tenseur d'ordre n (\mathbf{A}) :

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \dots M_{i_n j_n} A_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Il découle de la définition d'un tenseur d'ordre n que ses composantes se transforment comme le produit $A_{i_1} B_{i_2} \dots Q_{i_n}$ des composantes de n vecteurs \mathbf{A} , \mathbf{B} , \dots , \mathbf{Q} , car on a

$$A'_{i_1} B'_{i_2} \dots Q'_{i_n} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \dots M_{i_n j_n} A_{j_1} B_{j_2} \dots Q_{j_n}$$

Produit vectoriel

Le produit vectoriel $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est un vecteur axial (ou pseudo-vecteur) de norme

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$$

égale à l'aire du parallélogramme engendré par \mathbf{A} et \mathbf{B} , orthogonal à \mathbf{A} et \mathbf{B} et dont le sens est donné par la règle de la main droite. En terme de composantes, nous avons

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$

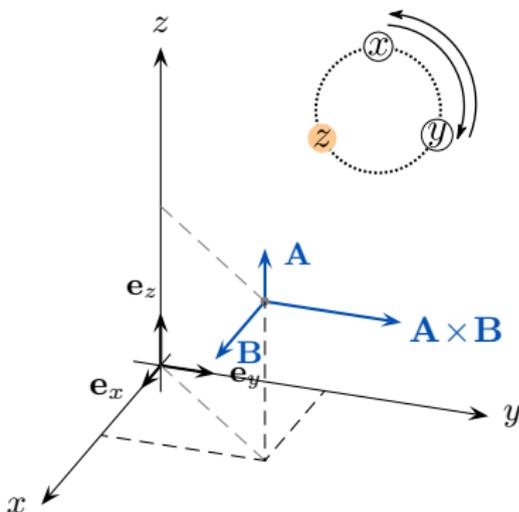
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Propriétés

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{A}, \mathbf{B}$
- $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$



Produit vectoriel (suite)

Les composantes du produit vectoriel $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ peuvent s'écrire sous la forme compacte

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ ou } (2, 3, 1), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{sinon } (i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i) \end{cases}$$

Identités utiles

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

Division vectorielle

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \wedge \mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \alpha \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^2} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

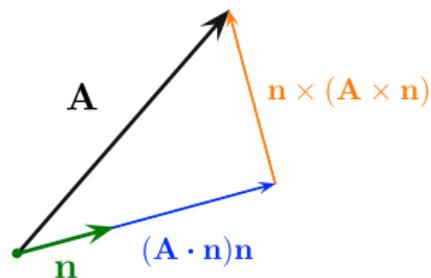
Produits mixtes

Soit trois vecteurs \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} . On définit les produits suivants :

- Triple produit vectoriel : $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
- Produit mixte : $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$
= volume du parallélépipède engendré par \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}

Le triple produit vectoriel est utilisé dans la décomposition d'un vecteur quelconque \mathbf{A} dans la direction d'un vecteur unitaire \mathbf{n} et sa direction orthogonale

$$\mathbf{A} = \underbrace{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}_{\parallel \mathbf{n}} + \underbrace{\mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})}_{\perp \mathbf{n}}$$



Scalaires et pseudoscalaires. Vecteurs polaires et axiaux ($\in \mathbb{R}^3$)

Scalaires et pseudoscalaires :

Si une formule pour déterminer un nombre dans un système d'axes donne le même nombre dans tout autre système d'axes relié par la composition de translations, rotations et réflexions, alors le nombre définit un *scalaire*. Si le nombre change de signe sous l'effet d'une réflexion ($\det(M) = -1$), alors il définit un *pseudoscalaire*.

Ex. : Le produit scalaire entre deux vecteurs (polaires) est un scalaire.

La norme d'un vecteur est un scalaire.

Le produit mixte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ de trois vecteurs (polaires) est un pseudoscalaire.

Vecteurs polaires et axiaux :

Si une formule pour déterminer un triplet de nombre (A_x, A_y, A_z) dans un système d'axes donne le triplet opposé $(-A_x, -A_y, -A_z)$ sous l'effet d'une inversion pure ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, $\det(M) = -1$), alors le triplet définit un vecteur *polaire*. Si le triplet ne change pas de signe, il définit un vecteur *axial* (ou pseudovecteur).

Ex. : Les vecteurs position, vitesse et accélération sont des vecteurs polaires.

Le vecteur moment cinétique ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) est un vecteur axial.

Vecteurs et dérivées

- Dérivée d'un vecteur dépendant d'une seule variable t

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt} \right)$$

- Dérivée d'un produit de vecteurs

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{dA^2}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

Dérivées partielles

- Dérivée partielle d'un champ de vecteurs (par rapport à x)

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}(x, y, z)}{\partial x} \right)_{y, z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

- Il est d'usage d'écrire la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ ou $\partial_x \mathbf{A}$ en se souvenant que les coordonnées y et z sont maintenues constantes (idem pour les autres dérivées partielles).
- Dérivée d'un champ scalaire dans la direction d'un vecteur unitaire \mathbf{n}

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \equiv \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + \Delta n \mathbf{n}) - \phi(\mathbf{r})}{\Delta n} = \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$$

- Théorème d'interversion des dérivées

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial y \partial x} \quad \forall \phi(\mathbf{r}) \text{ au min. deux fois dérivable}$$

Gradient (d'un champ scalaire)

Soit ϕ un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction qui à tout point de l'espace de coordonnées cartésiennes $\mathbf{r} = (x, y, z)$ associe le nombre $\phi(x, y, z)$.

Le gradient du champ scalaire ϕ est un champ vectoriel (polaire) dont la valeur en tout point est donnée par la limite (indépendante du choix particulier d'un système d'axes)

$$\text{grad } \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \phi \mathbf{n} dS$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Les composantes cartésiennes du gradient s'obtiennent donc par l'application de l'opérateur nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

au champ scalaire ϕ et se transforme comme celles d'un vecteur lors d'un changement de système d'axes.

Gradient (d'un champ scalaire)

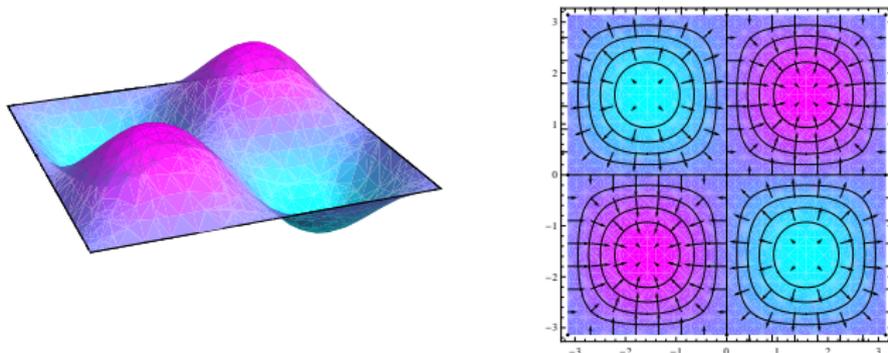


Figure. Champ scalaire $\phi(x, y) = \sin x \sin y$ (à gauche) et champ vectoriel $\nabla\phi$ (à droite).

Considérons deux points voisins \mathbf{r} et $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. La variation du champ scalaire ϕ entre ces deux points est donnée au premier ordre par

$$\Delta\phi \equiv \phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \simeq \nabla\phi \cdot \Delta\mathbf{r}$$

Le gradient de ϕ possède la direction de la pente la plus forte et pointe vers les valeurs croissantes de ϕ . Le gradient est perpendiculaire aux équipotentielles (surfaces $\phi(x, y, z) = \text{constante}$).

Développement en série de Taylor

Développement en série de Taylor d'un champ scalaire dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \phi(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}_0) + \sum_{r_i=x,y,z} \left. \frac{\partial \phi}{\partial r_i} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta r_i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{r_i=x,y,z \\ r_j=x,y,z}} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta r_i \Delta r_j + \dots \\ &= \phi(\mathbf{r}_0) + \nabla \phi|_{\mathbf{r}_0} \cdot \Delta \mathbf{r} + \frac{1}{2!} \Delta \mathbf{r} \cdot \left(H|_{\mathbf{r}_0} \Delta \mathbf{r} \right) + \dots \end{aligned}$$

où H est la matrice Hessienne de composantes $H_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r_i \partial r_j}$.

- $\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \nabla \phi|_{\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{1}{2!} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \left(H|_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right) + \dots$
- Translation dans \mathbb{R}^3 : $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}})^{\ell}}{\ell!} \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) - \mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}})^2}{2!} \phi(\mathbf{r}) + \dots$$

Exemple. Développement en série de $\phi(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$ aux alentours de $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[3 \frac{r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right] r'_i r'_j + \dots}$$

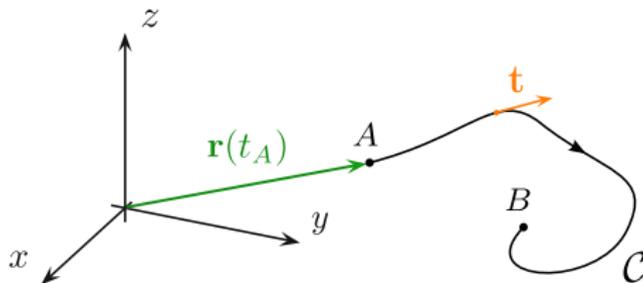
Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Une courbe \mathcal{C} est paramétrée par un chemin $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

L'intégrale curviligne (ou circulation) d'un champ vectoriel \mathbf{A} le long d'une courbe orientée $\mathcal{C} = \{\mathbf{r}(t) : t \in [t_A, t_B]\}$ est notée

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad \text{et est par définition égale à} \quad \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Le vecteur tangent unitaire à la courbe orientée est donné par $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$.



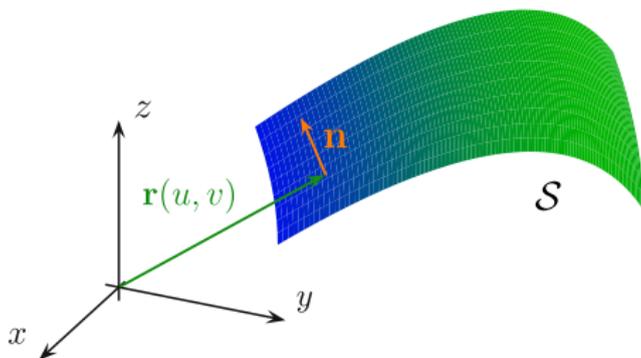
Intégrale superficielle ou flux d'un champ vectoriel

Une surface \mathcal{S} est paramétrée par une couverture $(\mathbf{r}(u, v), K)$ où $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ et $(u, v) \in K = [u_{\min}, u_{\max}] \times [v_{\min}, v_{\max}]$.

L'intégrale superficielle (ou flux) d'un champ vectoriel \mathbf{A} sur (au travers de) la surface orientée \mathcal{S} est notée

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{et est par définition égale à} \quad \iint_K \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}) du dv$$

La normale unitaire à la surface orientée est donnée par $\mathbf{n} = \frac{\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}}{|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}|}$.



Exemple : champ vectoriel constant

La circulation d'un champ vectoriel constant \mathbf{A} le long d'une courbe \mathcal{C} vaut

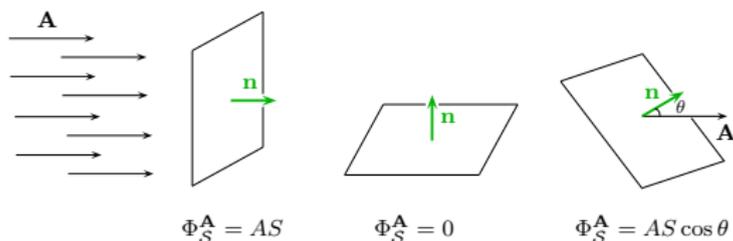
$$\Gamma_{\mathcal{C}}^{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{A} \cdot \int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{\ell}$$

Dans le cas d'un segment de droite allant de \mathbf{r}_A à \mathbf{r}_B , $\Gamma_{\mathcal{C}}^{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$. Dans le cas d'une courbe fermée, $\Gamma_{\mathcal{C}}^{\mathbf{A}} = 0$.

Le flux d'un champ vectoriel constant \mathbf{A} au travers d'une surface S de normale extérieure \mathbf{n} est égal à

$$\Phi_S^{\mathbf{A}} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{A} \cdot \int_S \mathbf{n} dS$$

Dans le cas d'une surface plane, $\Phi_S^{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{n}S) = AS \cos \theta$ où θ est l'angle entre \mathbf{A} et \mathbf{n} . Dans le cas d'une surface fermée, $\Phi_S^{\mathbf{A}} = 0$.



Divergence (d'un champ vectoriel)

Soit \mathbf{A} un champ vectoriel, c'est-à-dire une fonction qui à tout point de l'espace associe le vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$.

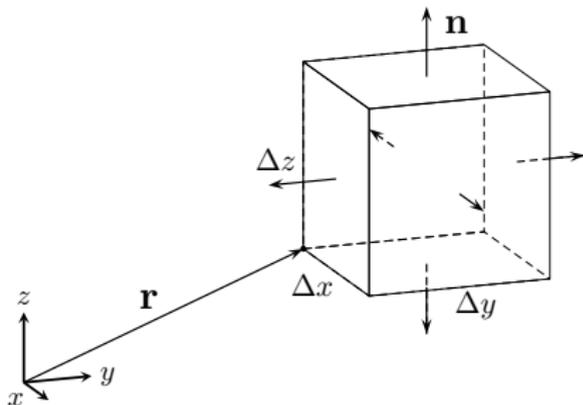
La divergence du champ vectoriel \mathbf{A} est un champ scalaire dont la valeur en tout point est donnée par la limite (indépendante du choix particulier d'un système d'axes)

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \text{flux local par unité de volume}$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Le flux au travers de l'élément de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ vaut par définition $\Delta V \text{ div } \mathbf{A}$ (pour $\Delta V \rightarrow 0$).



Rotationnel (d'un champ vectoriel)

Le rotationnel d'un champ vectoriel \mathbf{A} est un champ (pseudo)vectoriel défini en tout point de l'espace par la limite (indépendante du choix particulier d'un système d'axes pour une orientation fixée)

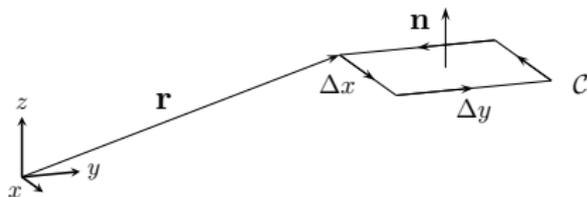
$$(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = \begin{array}{l} \text{circulation locale} \\ \text{par unité de surface} \end{array}$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \equiv \nabla \times \mathbf{A}$$

La circulation le long de la boucle C d'aire $\Delta S = \Delta x \Delta y$ vaut par définition $\Delta S (\text{rot } \mathbf{A})_z$ (pour $\Delta S \rightarrow 0$).

Les trois composantes $(\text{rot } \mathbf{A})_x$, $(\text{rot } \mathbf{A})_y$, $(\text{rot } \mathbf{A})_z$ forment un vecteur.

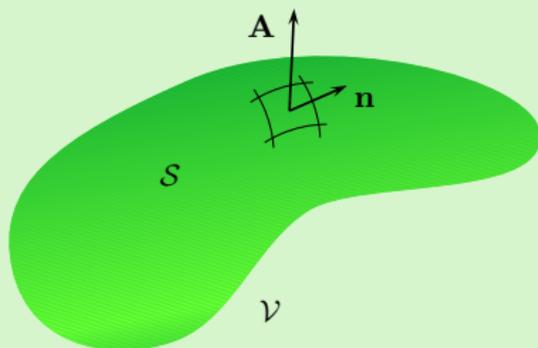


Théorèmes de Gauss et de Stokes

Formule de Gauss (du flux ou d'Ostrogradsky)

Pourvu que \mathbf{A} et $\nabla \cdot \mathbf{A}$ soient continus dans un volume donné \mathcal{V} dont la frontière est une surface \mathcal{S} régulière, c'est-à-dire admettant une normale extérieure \mathbf{n} presque partout, on a

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (\text{Gauss})$$



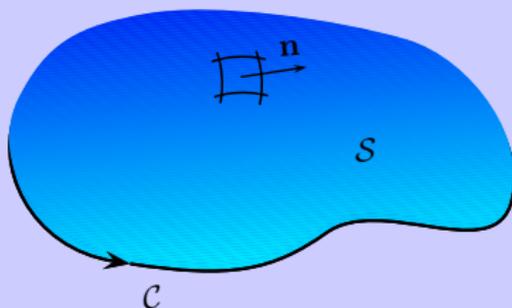
Théorèmes de Gauss et de Stokes

Formule de Stokes(-Ampère)

Pourvu que \mathbf{A} et $\nabla \times \mathbf{A}$ soient continus dans un domaine contenant la surface S ouverte, limitée par le contour \mathcal{C} , on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{Stokes})$$

avec la règle de la main droite reliant \mathbf{n} et le sens de parcours de \mathcal{C} .



Laplacien

Le laplacien du champ scalaire ϕ est le champ scalaire

$$\Delta\phi \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla \cdot \nabla\phi$$

ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

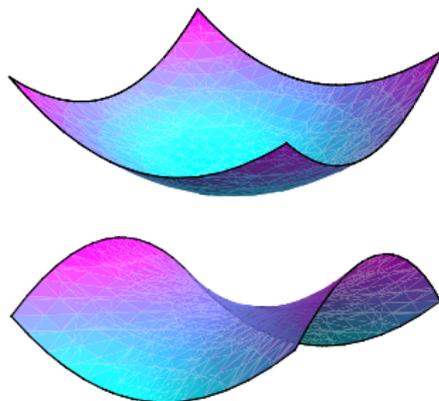
$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

On utilise aussi la notation $\nabla^2\phi$.

Pour le champ scalaire à deux dimensions $\phi(x, y) = a(x^2 + y^2)$, on a $\Delta\phi = 4a$.

Laplacien = \sum dérivées secondes
 $\sim \sum$ courbures
 \sim courbure moyenne

$\phi(x, y) = a(x^2 - y^2) \Rightarrow \Delta\phi = 0$.



Formulaire de calcul vectoriel

Pour tous champs scalaires ϕ , χ et tous champs vectoriels \mathbf{A} , \mathbf{B} définis sur \mathbb{R}^3 et deux fois continument dérivables, nous avons

- $\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- $\Delta \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$
- $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$
- $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
où $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = ((\mathbf{A} \cdot \nabla) B_x, (\mathbf{A} \cdot \nabla) B_y, (\mathbf{A} \cdot \nabla) B_z)$
- $\Delta(\phi \chi) = (\Delta \phi) \chi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \chi + \phi(\Delta \chi)$

Formules utiles

Les relations suivantes sont valables $\forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$:

- $\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$
- $\nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

Les relations suivantes sont valables $\forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$:

- $\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}, \quad \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) = -\frac{\mathbf{p}}{r} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r}$

Dériver "à la Feynman"

$$\phi(\mathbf{r}) = C (u(\mathbf{r}))^\alpha (v(\mathbf{r}))^\beta (w(\mathbf{r}))^\gamma \dots \quad C, \alpha, \beta, \gamma : \text{constantes}$$

$$\Rightarrow \nabla \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \left[\alpha \frac{\nabla u}{u} + \beta \frac{\nabla v}{v} + \gamma \frac{\nabla w}{w} + \dots \right]$$

Quelques primitives

Primitives importantes :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Changement de variable régulier $x = x(y)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(x(y)) \frac{dx}{dy}(y) dy$$

avec $a' = \lim_{x \rightarrow a} y(x)$ et $b' = \lim_{x \rightarrow b} y(x)$.

Remarques : • Toutes les primitives sont définies à une constante additive près.

• $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Changement de variable et opérateur de dérivation

Soit $\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ un changement de variable dans \mathbb{R}^n . On a

$$\begin{pmatrix} \partial_{r_1} \\ \partial_{r_2} \\ \vdots \\ \partial_{r_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)^{T, -1} \begin{pmatrix} \partial_{r'_1} \\ \partial_{r'_2} \\ \vdots \\ \partial_{r'_n} \end{pmatrix}$$

où $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)$ est la matrice jacobienne du changement de variable

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial r'_j}, \quad \text{jacobien} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right)$$

Exemple I : changement de variable linéaire dans \mathbb{R}^3

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \partial_{r_1} \\ \partial_{r_2} \\ \partial_{r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{r'_1} \\ \partial_{r'_2} \\ \partial_{r'_3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}'} = \nabla_{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}$$

Changement de variable et opérateur de dérivation

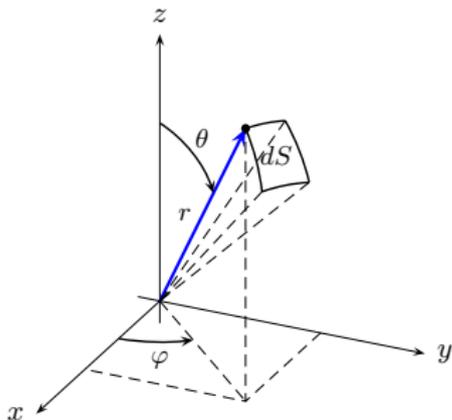
Exemple II : coordonnées sphériques [$\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$, $\mathbf{r}' \equiv (r, \theta, \varphi)$]

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}') = \begin{pmatrix} x(r, \theta, \varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}'} \right) \right| = r^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \sin \theta \sin \varphi & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \left(\sqrt{x^2 + y^2} / z \right) \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases}$$

$$r \in]0, +\infty[, \theta \in]0, \pi[, \varphi \in]0, 2\pi[$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} r^2 \sin \theta \phi(r, \theta, \varphi) dr d\theta d\varphi$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

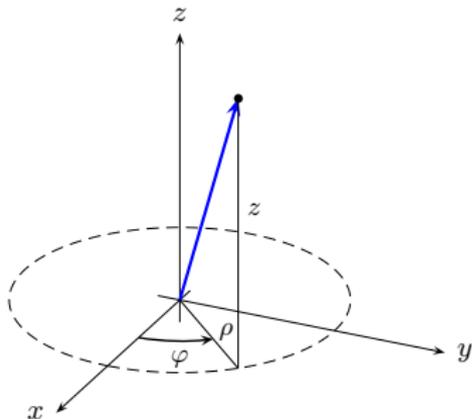
$$dV = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta) dr, \quad dS = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

Coordonnées cylindriques



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho \in]0, +\infty[, \varphi \in]0, 2\pi[, z \in]-\infty, \infty[$$

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \phi(\rho, \varphi, z) dz d\rho d\varphi$$

$$dV = (\rho d\varphi) d\rho dz, \quad dS = (\rho d\varphi) dz$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Champs transverses et longitudinaux

Définitions. Un champ vectoriel est dit *transverse* (ou *indivergentiel*) si sa divergence est nulle en tout point de l'espace. Un champ vectoriel est dit *longitudinal* (ou *irrotationnel*) si son rotationnel est nul en tout point de l'espace.

Théorème (champ transverse)

Un champ vectoriel \mathbf{B} est transverse ssi il dérive d'un potentiel vecteur \mathbf{A} .

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Le potentiel vecteur \mathbf{A} est défini à un gradient d'un champ scalaire ($\nabla\phi$) près.

Théorème (champ longitudinal)

Un champ vectoriel \mathbf{E} est longitudinal ssi il dérive d'un potentiel scalaire V .

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

Le potentiel scalaire V est défini à une constante additive (C) près.

Remarque : Nous supposons tous les champs deux fois continûment dérivables afin que le théorème d'interversion des dérivées soit d'application.

Champs transverses et longitudinaux

Théorème (Helmholtz)

Tout champ vectoriel \mathbf{A} qui décroît plus vite que $1/r$ à grande distance (cas des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} statiques) peut se décomposer en une composante longitudinale \mathbf{A}_{\parallel} définie univoquement par sa divergence et une composante transverse \mathbf{A}_{\perp} définie univoquement par son rotationnel.

Plus précisément,

$$\mathbf{A} = \underbrace{-\nabla U}_{\mathbf{A}_{\parallel}} + \underbrace{\nabla \times \mathbf{W}}_{\mathbf{A}_{\perp}}$$

avec

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

et

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{(\nabla \times \mathbf{A})(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Contre-exemple : champ homogène

Exemples de champs vectoriels (I)

(a) Champ homogène $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$

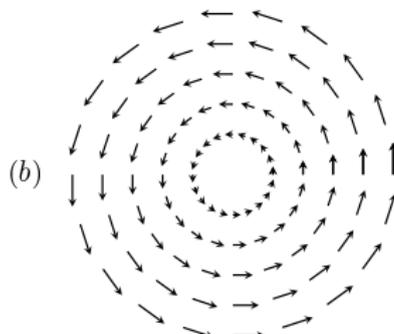
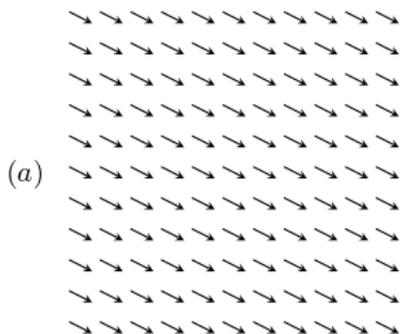
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{r}}{2} + \nabla \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + C$$

(b) Champ tournant $\mathbf{A} = \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \omega(-y, x, 0) = \omega r \mathbf{e}_\varphi$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \omega z (x, y, 0) + \nabla \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 2\omega \mathbf{e}_z$$



Exemples de champs vectoriels (II)

(c) Champ radial croissant $\mathbf{A} = (x, y, z) = \mathbf{r}$

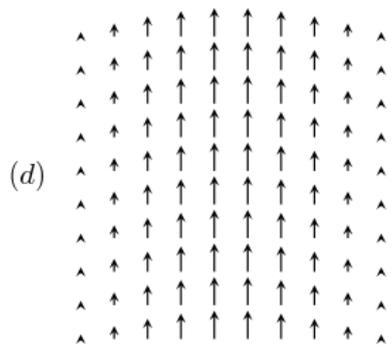
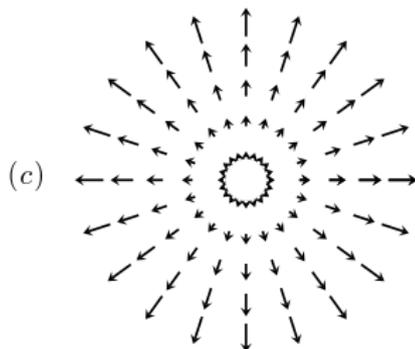
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = r^2/2 + C$$

(d) Champ rotationnel $\mathbf{A} = (0, \sin x, 0)$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = z \sin x \mathbf{e}_x + \nabla \phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \cos x \mathbf{e}_z$$



Exemples de champs vectoriels (III)

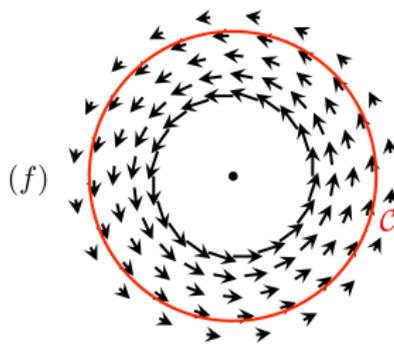
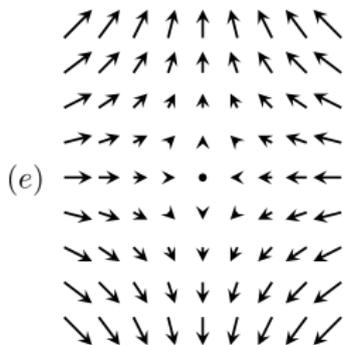
(e) Champ inhomogène indivergentiel et irrotationnel $\mathbf{A} = (-x, y, 0)$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = (yz, xz, 0) + \nabla\phi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla\Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = (y^2 - x^2)/2 + C$$

(f) Champ vortex $\mathbf{A} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ (Δ diverge en $r = 0$)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq 0 \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{r} \neq 0 \end{aligned} \quad \text{mais} \quad \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell \neq 0$$



Champs centraux

Un champ scalaire central $V(r)$ est un champ dont la valeur ne dépend que de la distance r à un point O (centre du champ). Ses équipotentielles sont des sphères de centre O . Le gradient de $V(r)$ est le champ vectoriel central

$$\nabla V(r) = \frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r$$

et le laplacien de $V(r)$ est le champ scalaire central

$$\Delta V(r) = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

Le champ vectoriel central $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{e}_r$ est irrotationnel et dérive du potentiel scalaire

$$V(r) = - \int E(r) dr \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = E(r) \mathbf{e}_r$$

Sa divergence vaut

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dE}{dr} + 2 \frac{E}{r}$$

Rappels de mécanique

- Équation du mouvement

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v}$$

- Conservation de l'énergie (où $K \equiv$ énergie cinétique)

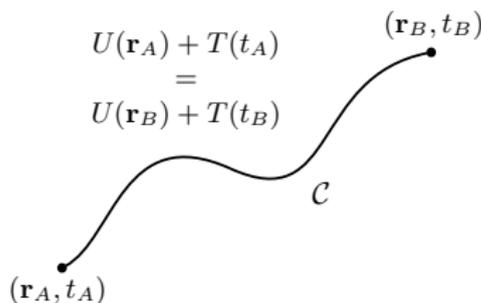
$$P = \frac{dK}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad E = mc^2 = K + m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + c^2p^2}$$

- Lorsqu'une particule soumise à une force \mathbf{F} se déplace le long d'une trajectoire \mathcal{C} , le travail fourni par cette force est donné par

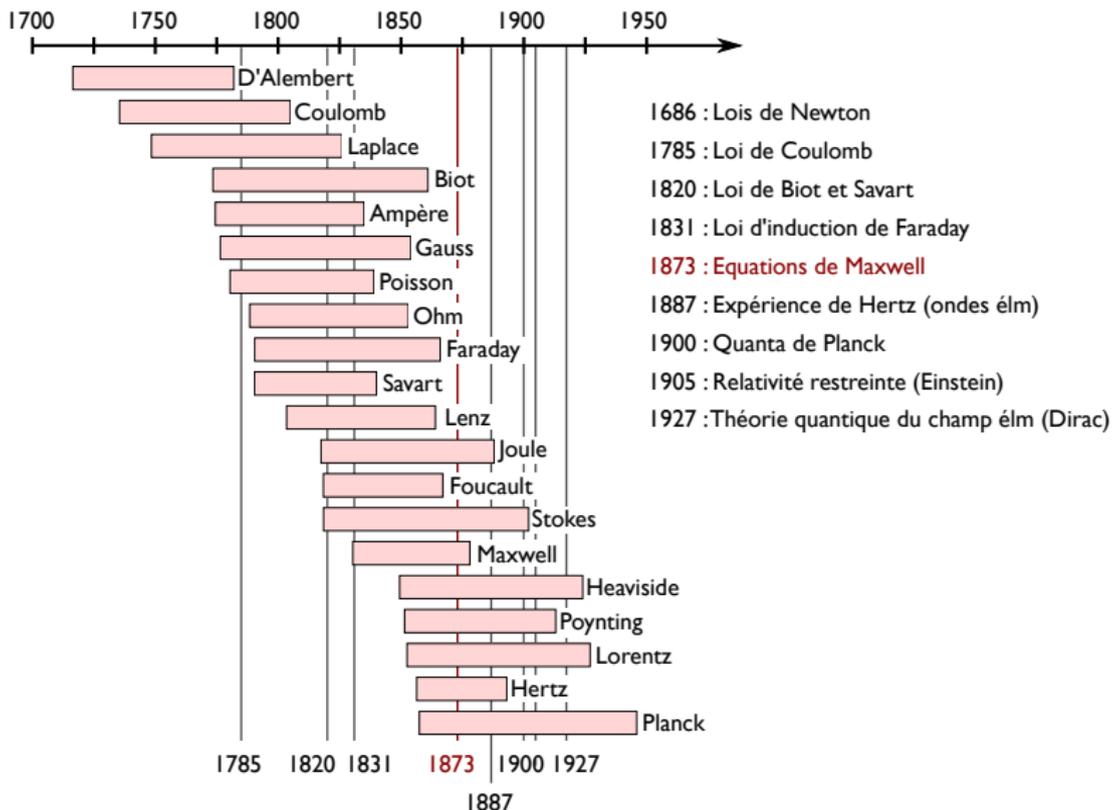
$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\ell = T(t_B) - T(t_A)$$

Si la force est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle U , $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$, et nous avons

$$W = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$$



Ligne du temps



Quelques citations (I)

'All the mathematical sciences are founded on relations between physical laws and laws of numbers, so that the aim of exact science is to reduce the problems of nature to the determination of quantities by operations with numbers.'

– James Clerk Maxwell



'The most fascinating subject at the time I was a student was Maxwell's theory.'

– Albert Einstein



'He achieved greatness unequalled.'

– Max Planck



Quelques citations (II)

'The fundamental laws necessary for the mathematical treatment of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty lies only in the fact that application of these laws leads to equations that are too complex to be solved.'

– Paul A. M. Dirac



'From a long view of the history of mankind – seen from, say, ten thousand years from now – there can be little doubt that the most significant event of the 19th century will be judged as Maxwell's discovery of the laws of electrodynamics. The American Civil War will pale into provincial insignificance in comparison with this important scientific event of the same decade.'

– Richard P. Feynman



'...there are strong theoretical reasons to believe that magnetic charge exists in nature, and may have played an important role in the development of the universe. Searches for magnetic charge continue at the present time, emphasizing that electromagnetism is very far from being a closed object'

– Julian Schwinger



La charge électrique

- La charge électrique apparaît sous deux formes : positive et négative
- La charge électrique totale d'un système isolé est constante au cours du temps, quel que soit le mouvement et le nombre de particules

(exemples : les atomes d'hydrogène et d'hélium sont électriquement neutres bien que le mouvement des électrons au sein de ces atomes soit très différent ; l'annihilation d'un électron et d'un positron n'occasionne aucune variation de charge nette)

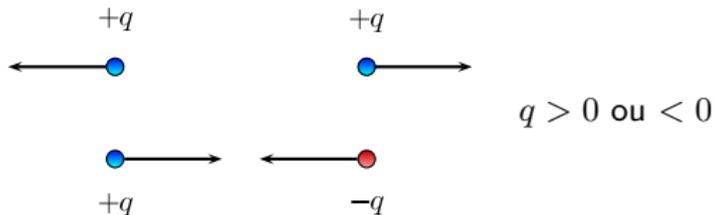
- La charge électrique est quantifiée

$$Q = ne \text{ avec } n \text{ entier et } e = q_p = -q_e \simeq 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

ou $Q = ne/3$ si on tient compte des quarks, de charges $-\frac{1}{3}e$ (quarks d, s, b) et $\frac{2}{3}e$ (quarks u, c, t)

Dirac : mécanique quantique + existence de charges magnétiques \Rightarrow quantification de la charge électrique

- Interaction électrique \gg interaction gravitationnelle
mais neutralité (électrique) des atomes, molécules, cristaux, ...



Quelques particules élémentaires et bosons de jauge

Particule	Charge électrique [e]	Moment dipolaire magnétique	Moment dipolaire électrique [e cm]	Moment quadrupolaire électrique	Spin
électron (e)	-1	$2.0023193 \mu_B$	$< 0.87 \cdot 10^{-28}$	0	1/2
proton (p)	+1	$5.5856 \mu_N$	$< 5.4 \cdot 10^{-24}$	0	1/2
neutron (n)	0	$-3.8260856 \mu_N$	$< 3 \cdot 10^{-26}$	0	1/2
neutrino (ν_e) électronique	0	$< 0.29 \cdot 10^{-10} \mu_B$	0	0	1/2
photon (γ)	$< 10^{-35}$	0	0	0	1
bosons W^\pm	± 1	$e\hbar/M_W$	0	$-e(\hbar/M_W c)^2$	1
boson Z^0	0	0	0	0	1
gluon (g)	0	0	0	0	1
Higgs (H^0)	0	0	0	0	0

Magnéton de Bohr : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.274009 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$

Magnéton nucléaire : $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.050783 \cdot 10^{-27} \text{ A.m}^2$

Valeurs tirées de C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **40**, 100001 (2016).

Loi de Coulomb (1785)

Les forces qu'exercent deux particules ponctuelles chargées au repos l'une sur l'autre sont données par la loi de Coulomb (action à distance)

$$\mathbf{F}_{q'/q}(\mathbf{r}) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{F}_{q/q'}(\mathbf{r}') \quad (\text{Coulomb})$$

La mesure des forces coulombiennes entre deux particules identiques permet d'en déterminer les charges, au signe près.

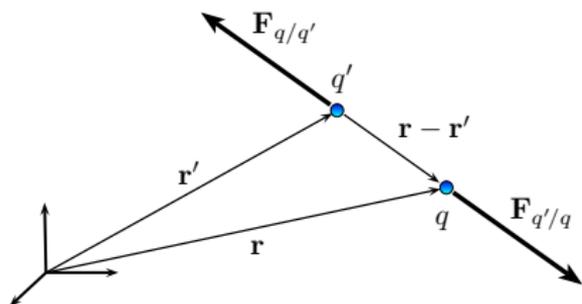


Fig. Forces coulombiennes dans le cas où q et q' sont de même signe.

Principe de superposition

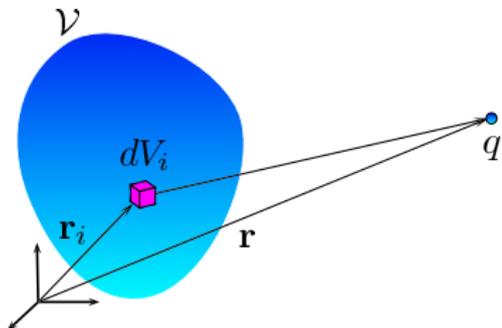
La force totale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ qu'exerce un ensemble de particules ponctuelles de charge q_i sur une charge ponctuelle q située au point \mathbf{r} est donnée par

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{F}_{q_i/q}(\mathbf{r})$$

(additivité des effets de la charge électrique)

Densité volumique de charge

Considérons un système formé d'un très grand nombre de charges. Chaque élément de volume dV_i centré en \mathbf{r}_i contient lui-même un très grand nombre de charges donnant lieu à une charge totale dq_i . La densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r})$ (en C.m^{-3}) est définie au travers de la relation $dq_i = \rho(\mathbf{r}_i) dV_i$.



La force totale qui s'exerce sur une charge ponctuelle q est alors donnée, en vertu du principe de superposition, par

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q dq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

$$\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Remarque : Le concept de densité volumique de charge a un sens même dans le cas d'une charge ponctuelle (un électron par exemple) puisque d'après la mécanique quantique, on peut y associer une densité (de probabilité) de charge $\rho(\mathbf{r}) = q|\psi(\mathbf{r})|^2$.

Champ électrostatique

Considérons un ensemble de particules fixes de charges q_i situées aux points \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, N$). Si une particule « test » de charge q est placée au point \mathbf{r} , et dans l'hypothèse où elle ne perturbe pas le système de charges, celui-ci exerce sur la particule « test » une force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (\text{champ électrique})$$

→ ne dépend que du système de charges q_i

Pour une distribution volumique de charge

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

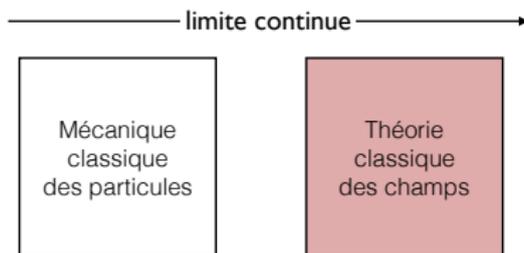
La connaissance du champ électrique en un point de l'espace suffit à déterminer la force qui agira sur une particule chargée placée en ce point.

$[E] = \text{N.C}^{-1}$ (force par unité de charge) ou V.m^{-1}

Particules et champs

Le langage de la mécanique classique (Newtonienne) est celui des particules matérielles, de leur position, vitesse, accélération et des forces qu'elles exercent les unes sur les autres (ou qui agissent sur elles de l'extérieur).

La théorie classique des phénomènes électriques et magnétiques constitue un changement de paradigme dans la description des systèmes physiques car elle considère les champs (en particulier les champs électrique et magnétique) comme un concept central. En théorie classique des champs, la valeur d'un champ et son taux de variation temporel en un point quelconque de l'espace sont des grandeurs physiques à part entière, qui jouent un rôle similaire à celui de la position et de la vitesse d'une particule en mécanique classique. Puisqu'un champ est défini en une infinité (non-dénombrable) de points de l'espace, la théorie des champs traite de systèmes physiques avec un nombre infini de degrés de liberté.



Loi de Gauss (1813)

Pour tout volume \mathcal{V} délimité par une surface S , on a

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) dV$$

où la somme court sur toutes les charges contenues à l'intérieur du volume \mathcal{V} .

Expression locale/différentielle :
$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$



K. F. Gauss
(1777-1855)

La loi de Gauss découle

- du caractère central de la force de Coulomb
- de la loi en inverse du carré de la distance pour la force entre charges
- du principe de superposition linéaire

Remarque : Cette loi se généralise à des sources et des champs non stationnaires.

Potentiel électrique

- Le champ électrostatique est
- de nature centrale
 - une grandeur vectorielle additive

Il en résulte que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est irrotationnel, $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, et dérive par conséquent d'un potentiel scalaire

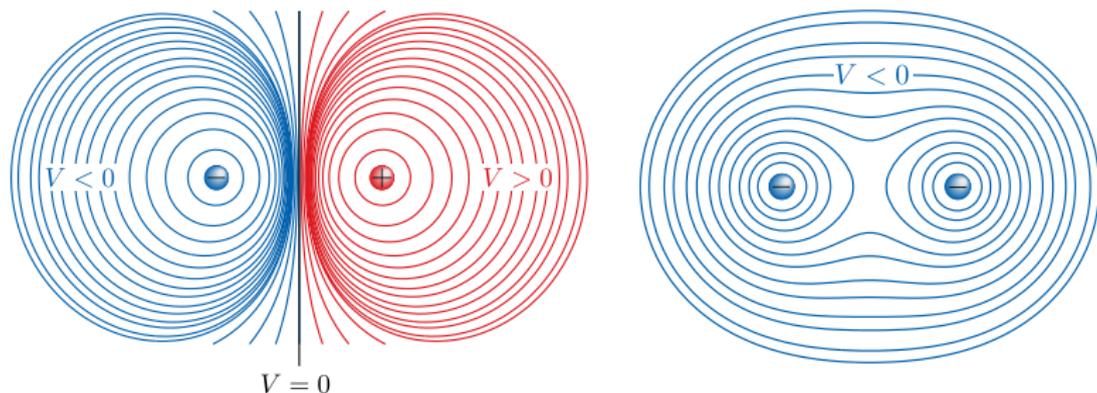
$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (\text{charges ponctuelles}) \\ \boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'} \quad (\text{distribution de charges}) \end{array} \right.$$

Le potentiel électrique $V(\mathbf{r})$ pour une distribution volumique de charges

- est défini à une constante additive près, choisie telle que $V(\infty) = 0$
- est fini, continu et continûment dérivable partout pourvu que $\rho(\mathbf{r})$ soit fini en tout point (et que la charge totale soit finie)
- représente l'énergie potentielle accumulée par unité de charge électrique
- s'exprime en J.C^{-1} (énergie par unité de charge) ou Volt

Equipotentielles

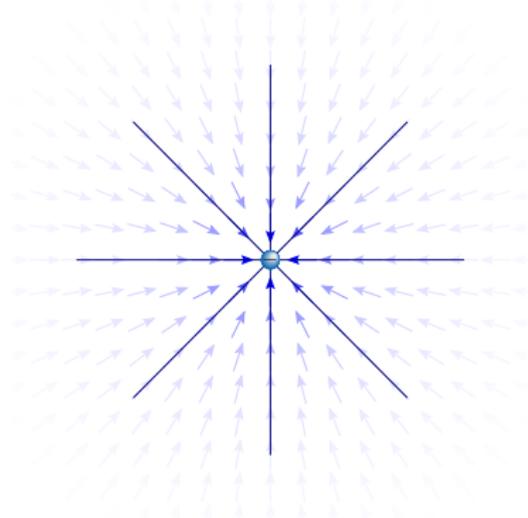
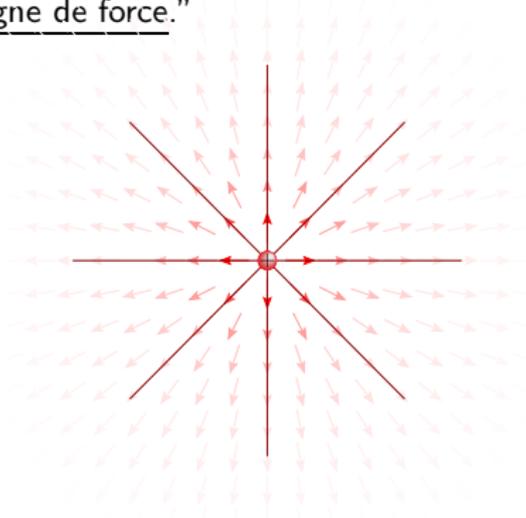
A 2 dimensions, les courbes équipotentiels sont définies comme les courbes le long desquelles le potentiel est constant. A 3 dimensions, les courbes laissent place à des surfaces équipotentiels sur lesquelles le potentiel est constant.



Courbes équipotentiels : (gauche) 2 charges opposées
(droite) 2 charges identiques.

Lignes de force

Citons Maxwell : “En chaque point de l'espace, on peut trouver une ligne qui indique la direction et le sens de la force s'exerçant sur une particule chargée positivement. La direction et le sens sont définis en tout point de l'espace ; commençons en un point quelconque et traçons une courbe telle que, lorsqu'on la parcourt, en chaque point sa direction coïncide avec celle de la force résultante en ce même point. La courbe ainsi obtenue indique la direction de la force en chacun des points où elle passe, c'est la raison pour laquelle on l'appelle une ligne de force.”



Énergie potentielle électrique

La force de Coulomb $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ qui s'exerce sur une particule de charge q plongée dans un champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est conservative. Elle dérive d'une énergie potentielle $U(\mathbf{r}) = qV(\mathbf{r})$.

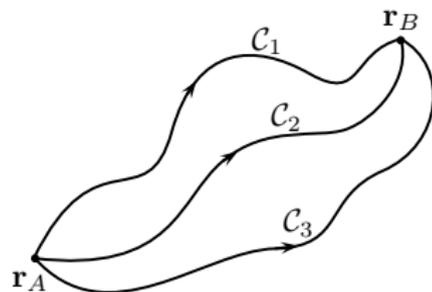
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\ell = 0$$

Stokes

Il s'ensuit que le travail fourni par la force de Coulomb que subit une particule de charge unitaire ($q = 1$ C) se déplaçant le long d'une trajectoire C ne dépend que des positions initiale et finale :

$$W_{\text{Coulomb}} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\ell = V(\mathbf{r}_A) - V(\mathbf{r}_B)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= - \int_{\mathbf{r}'=\infty}^{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\ell' \\ V(\infty) &= 0 \end{aligned}}$$



$$W_1 = W_2 = W_3$$

Équation de Poisson

L'équation de Poisson

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

permet de calculer le potentiel électrique généré par une distribution de charge connue. C'est une équation aux dérivées partielles qui en général possède de multiples solutions. Cependant, si on impose des conditions aux limites d'un des deux types suivants

- Conditions aux limites de Dirichlet : on impose la valeur du potentiel sur la frontière (surface) du domaine considéré (par exemple un ensemble de conducteurs portés à différents potentiels).
- Conditions aux limites de Neumann : on impose la valeur du champ électrique normal (dérivée normale du potentiel) sur la frontière du domaine considéré (par exemple un ensemble de conducteurs possédants des densités surfaciques de charge connues).

et qu'il existe une solution de l'équation de Poisson, alors celle-ci est unique (à une constante additive près pour des conditions aux limites de Neumann).

Application à la sphère chargée uniformément en volume

Le potentiel et le champ électrique créé par une sphère de rayon R chargée uniformément en volume avec une densité de charge ρ_0 vaut

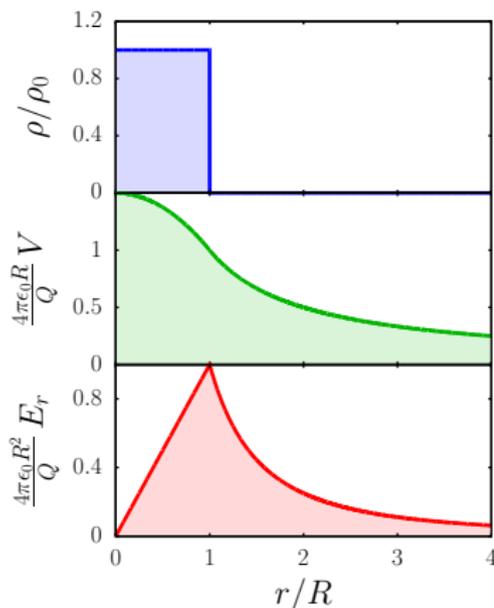


Figure. Densité de charge, potentiel et champ électrique.

Potentiel électrique :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

Champ électrique : $\mathbf{E} = E_r(r) \mathbf{r}/r$ avec

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$$

où $Q = (4\pi/3)R^3\rho_0$ est la charge totale.

Équation de Laplace

Dans une région vide de charges, le potentiel électrostatique satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta V(\mathbf{r}) = 0$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions harmoniques. Elles sont infiniment continument dérivables et ont toutes la propriété suivante :

- Si $V(\mathbf{r})$ vérifie l'équation de Laplace, alors la valeur moyenne de V sur une sphère $\mathcal{S}_R(\mathbf{r})$ de rayon *arbitraire* R centrée sur \mathbf{r} est égale à la valeur de V au centre de la sphère, soit

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\mathcal{S}_R(\mathbf{r})} V(\mathbf{r}') dS'$$

En particulier, cela implique que les maxima et minima de $V(\mathbf{r})$ ne peuvent se trouver qu'au bord du domaine dans lequel $\Delta V(\mathbf{r}) = 0$.

Remarque : L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles qu'on retrouve dans de nombreuses branches de la physique (électromagnétisme, astronomie, dynamique des fluides, mécanique quantique, ...).

Théorème d'Earnshaw

Le théorème qui suit est une conséquence directe de la propriété précédente

Il est impossible de maintenir une particule chargée en équilibre stable dans une région vide de charges uniquement à l'aide d'un champ électrostatique

Démonstration :

En effet, si une particule chargée positivement était confinée dans une région de l'espace vide de charges, le potentiel électrique posséderait un minimum strict local, tel que $V(\mathbf{r}) > V(\mathbf{r}_0)$ au voisinage du minimum $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Or ceci est impossible vu que la valeur moyenne du potentiel sur une petite sphère centrée en \mathbf{r}_0 doit être égale à la valeur du potentiel au centre de la sphère. Le raisonnement est similaire dans le cas d'une charge négative. Par conséquent, un minimum ou maximum local du potentiel ne peut apparaître qu'aux bords du domaine vide de charges.

Remarque : Le piégeage de particules chargées peut toutefois s'effectuer à l'aide d'un champ électrique variable dans le temps (piège de Paul), ou encore à l'aide de la superposition d'un champ électrostatique et d'un champ magnétique constant (piège de Penning).

<< Fonction >> delta de Dirac (à une dimension)

La « fonction » $\delta(x)$ de Dirac est définie par les conditions suivantes :

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

pour toute fonction $f(x)$ continue en $x = 0$.

Propriétés :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-a}^b \delta(x) dx = 1 \quad (a, b > 0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a), \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \Rightarrow \delta(x) = \delta(-x)$ et $[x] = m \Rightarrow [\delta(x)] = m^{-1}$
- $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ où $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$ et les x_i sont les zéros simples de la fonction $f(x)$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$

<< Fonction >> delta de Dirac (à une dimension)

La « fonction » delta peut être vue comme une limite de fonctions (valable uniquement sous le signe intégrale)

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \delta_a(x)$$

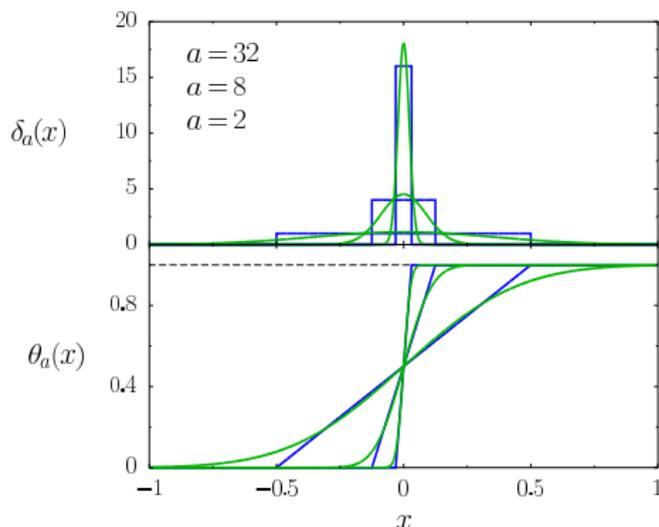
avec

$$(1) \delta_a(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}, & -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(2) \delta_a(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}, \dots$$

$$\theta_a(x) = \int_{-\infty}^x \delta_a(x') dx' \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{fonction d'Heaviside})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)}$$



<< Fonction >> delta de Dirac (à trois dimensions)

A trois dimensions,

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}) dV = f(\mathbf{0})$$

pour toute fonction $f(\mathbf{r})$ continue en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Coordonnées	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
cartésiennes	$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$
cylindriques	$\delta(\rho - \rho')\frac{\delta(\varphi - \varphi')}{\rho}\delta(z - z')$
sphériques	$\delta(r - r')\frac{\delta(\theta - \theta')}{r}\frac{\delta(\varphi - \varphi')}{r \sin \theta}$

Deux relations utiles en électromagnétisme (valables uniquement sous le signe intégral)

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Charges ponctuelles, linéiques ou superficielles et densité de charge

Le potentiel électrique au point \mathbf{r} créé par différents types de sources s'écrit

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}}_{\text{charges ponctuelles}} + \underbrace{\int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\ell'}_{\text{charges linéiques}} + \underbrace{\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'}_{\text{charges superficielles}} + \underbrace{\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{\text{charges volumiques}} \right]$$

Il est possible d'écrire ces différentes contributions sous une forme unique en associant une densité de charge à une distribution de charges ponctuelles, linéiques ou superficielles grâce à la « fonction » δ de Dirac, qui est nulle partout sauf aux points où son argument s'annule. A une surface d'équation $g(\mathbf{r}) = 0$ chargée avec une densité surfacique $\sigma(\mathbf{r})$ est associée la densité de charge

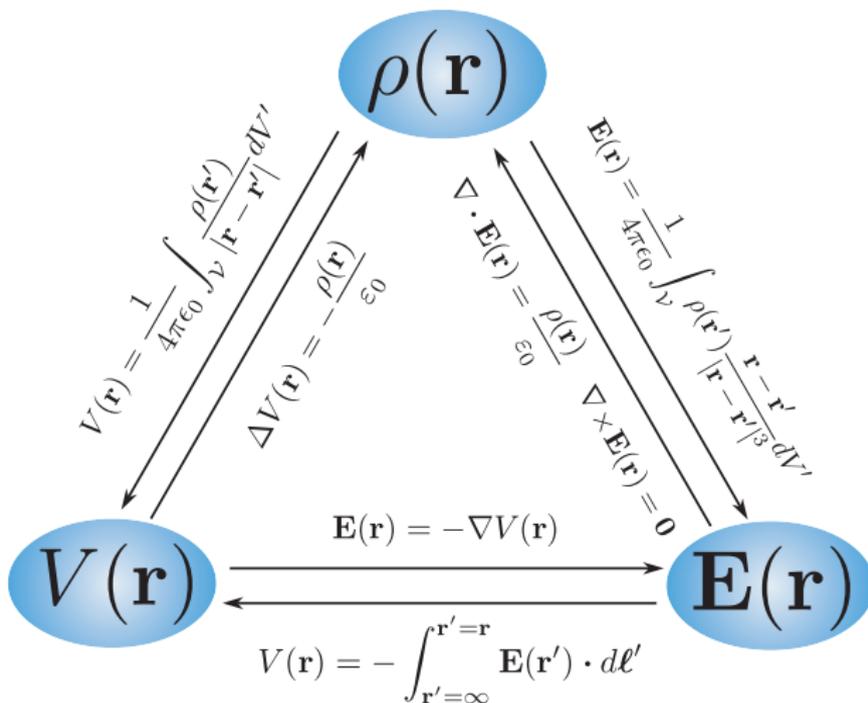
$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \delta(g(\mathbf{r})) \quad \text{en C.m}^{-3}$$

Similairement, à une courbe d'équation $(f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r})) = (0, 0)$ chargée avec une densité linéique $\lambda(\mathbf{r})$ et à une particule ponctuelle de charge q_i située au point $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ sont associées les densités de charge

$$\rho(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) \delta(f_1(\mathbf{r})) \delta(f_2(\mathbf{r})) \quad \text{en C.m}^{-3}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) \quad \text{en C.m}^{-3}$$

Électrostatique $[\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}), \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})]$



Développement multipolaire électrostatique

Le potentiel électrostatique à l'extérieur ($r > r'_{\max} \equiv \max_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}} |\mathbf{r}'|$) d'une distribution localisée de charges admet un développement en série en $1/r$ de la forme

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \left(3 \frac{r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{r'^4_{\max}}{r^4} \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{scalaire})$$

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (\text{vecteur})$$

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) r_i r_j dV \quad (\text{tenseur d'ordre 2})$$

où q est la charge totale (moment monopolaire), \mathbf{p} est appelé moment dipolaire électrique et \mathbf{Q} tenseur quadripolaire électrique de la distribution de charges. Le tenseur \mathbf{Q} est symétrique ($Q_{ij} = Q_{ji}$).

Moment quadrupolaire électrique

On définit un nouveau tenseur quadrupolaire $\mathbf{Q}' = 3\mathbf{Q} - (\text{Tr } \mathbf{Q})\mathbf{1}$, symétrique et de trace nulle, de composantes cartésiennes

$$Q'_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) dV$$

Le tenseur \mathbf{Q}' ne dépend plus que de 5 paramètres réels indépendants et permet d'exprimer la contribution quadrupolaire au potentiel sous la forme $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{r}}{r^5}$.

- Cas d'une symétrie cylindrique autour de Oz :

$$\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} -Q_0/2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_0/2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 : \underline{\text{moment quadrupolaire}}$$

Pour une distribution de charge complètement positive (négative), le moment quadrupolaire est une mesure de l'écart à la sphéricité. En particulier, un ellipsoïde de révolution d'équation $(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/b^2 = 1$ chargé uniformément en volume avec une densité de charge ρ_0 a pour moment quadrupolaire

$$Q_0 = \frac{8\pi}{15} \rho_0 a^2 b (b^2 - a^2) \propto b^2 - a^2$$

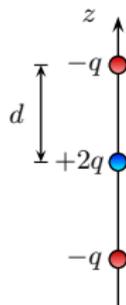
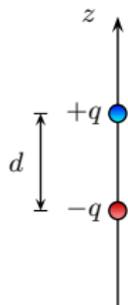
Dipôle et quadrupole électrique (linéaires)

Pour une paire de charges opposées séparées d'une distance d le long de l'axe z , le moment monopolaire est nul et le moment dipolaire électrique est égal à $\mathbf{p} = qd\mathbf{e}_z$. Un dipôle ponctuel est défini par la double limite $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow +\infty$, $qd = p$. Le champ électrique d'un dipôle ponctuel est donné, en tout point de l'espace, par

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}) \right)$$

où le terme avec la fonction delta garantit que $\nabla \times \mathbf{E}_{\text{dip}} = 0 \forall \mathbf{r}$.

Pour deux dipôles opposés le long de l'axe z (c.f. figure de droite), les moments monopolaire et dipolaire électrique sont nuls et le moment quadrupolaire est égal à $Q_0 = -4qd^2$.



Équipotentiels et lignes de champ d'un dipôle ponctuel

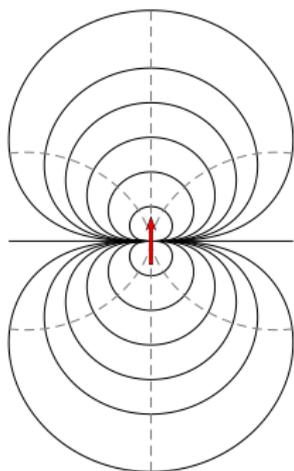
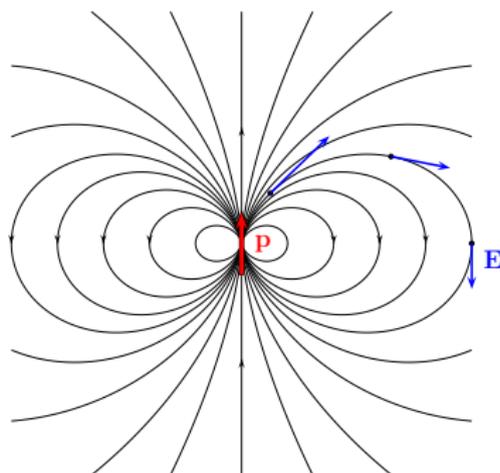
Équipotentiels : $r = a\sqrt{\cos\theta}$ Lignes de champ : $r = b\sin^2\theta$ 

Fig. Représentation des lignes de champ et des équipotentiels d'un dipôle ponctuel.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

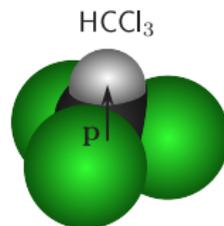
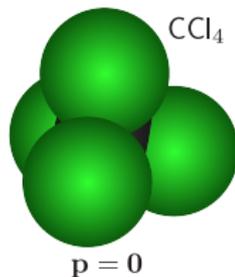
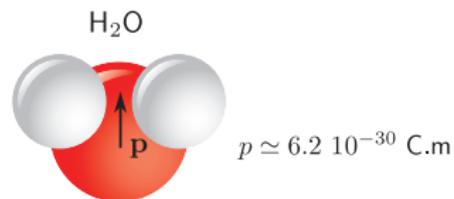
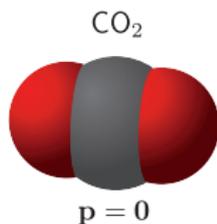
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right)$$

Moment dipolaire électrique permanent

Particules et atomes : ne possèdent pas de moment dipolaire électrique permanent.

Molécules : peuvent posséder un moment dipolaire électrique permanent.

Exemples : les molécules diatomiques du même élément (O_2 , H_2 , ...) sont non-polaires. Par contre, les molécules diatomiques formées de deux espèces atomiques différentes (HCl , CO , ...) sont polaires.



Énergie potentielle d'un dipôle électrique

L'énergie potentielle de rotation d'un dipôle électrique (ponctuel) dans un champ électrique extérieur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est donnée par

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Le dipôle est soumis à un moment (ou couple) de force

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

qui tend à l'orienter parallèlement au champ électrique extérieur $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Dans un champ électrique non-uniforme, le dipôle est soumis à une force

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

qui l'attire vers les régions de forte intensité du champ lorsque $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$.

Remarque : L'expression obtenue pour l'énergie potentielle de rotation du dipôle peut également se dériver à partir du moment de force $\tau = |\boldsymbol{\tau}|$ en utilisant la relation $dU = -dW = \tau d\theta$.

Interaction dipôle–dipôle

Deux dipôles séparés par une distance finie interagissent mutuellement car chaque dipôle ressent le champ créé par l'autre. L'énergie potentielle du premier dipôle dans le champ créé par le second est donnée par (on pose $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$U_{12} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} \right]$$

On note que $U_{12} = U_{21} \equiv U$. Cette énergie d'interaction U est à l'origine des interactions intermoléculaires. Elle conduit à de nombreuses forces attractives : tension de surface, forces visqueuses, force de cohésion, force d'adhésion, ...

On peut encore l'écrire sous la forme

$$U = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r_{12}^3}$$

où λ ne dépend que de l'orientation des dipôles par rapport à la droite qui les joint ($\lambda = 2$ si les dipôles sont alignés dans le même sens sur la droite, auquel cas l'énergie est minimale ; $\lambda = -2$ si les dipôles sont alignés en sens opposés sur la droite, auquel cas l'énergie est maximale).

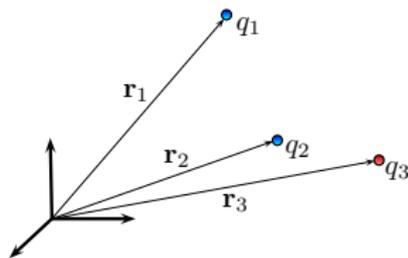
Énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

L'énergie que nous devons fournir sous forme de travail pour assembler une certaine configuration de charges q_1, q_2, q_3, \dots vaut (par étapes)

$$W_{q_1} = 0$$

$$W_{q_1+q_2} = - \int_{\mathbf{r}'=\infty}^{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_{q_1/q_2}(\mathbf{r}') \cdot d\ell' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$\begin{aligned} W_{q_1+q_2+q_3} &= W_{q_1+q_2} + W_{q_1+q_3} + W_{q_2+q_3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right) \end{aligned}$$



L'énergie électrostatique emmagasinée dans un système de N charges ponctuelles q_1, \dots, q_N situées aux points $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ est égale à ce travail, soit

$$U_{\text{élec}} = \sum_{\text{paires}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i)$$

où $V(\mathbf{r}_i)$ est le potentiel créé en \mathbf{r}_i par toutes les charges sauf q_i .

Énergie électrostatique d'une distribution de charges

L'expression pour une distribution volumique de charges s'écrit

$$U_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i) \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'$$

ou encore

$$U_{\text{élec}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(\mathbf{r}) dV$$

Interprétation

L'énergie électrostatique $U_{\text{élec}}$ d'une distribution de charges, qui est égale au travail total nécessaire pour amener le système à sa configuration finale partant de charges infiniment éloignées, est disséminée dans tout l'espace où règne un champ électrique créé par la distribution, avec une densité (énergie par unité de volume)

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r})$$

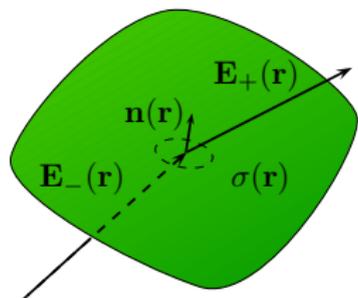
Discontinuités possibles du champ électrique

La composante du champ électrique normale à une surface chargée subit une discontinuité au travers de cette surface. Les composantes tangentielles du champ électrique sont par contre toujours continues.

En tout point de la surface, nous avons les relations

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$



Remarque : En réalité, les charges à la surface d'un conducteur sont distribuées sur une épaisseur de l'ordre de 10^{-9} m. À cette échelle, le champ électrique varie continûment de la valeur intérieure à la valeur extérieure à la surface.

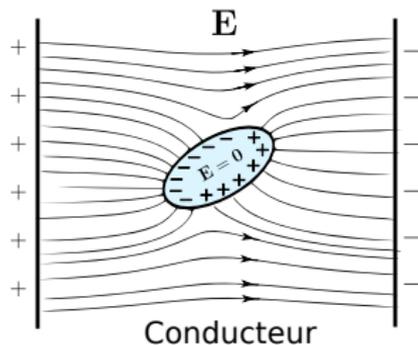
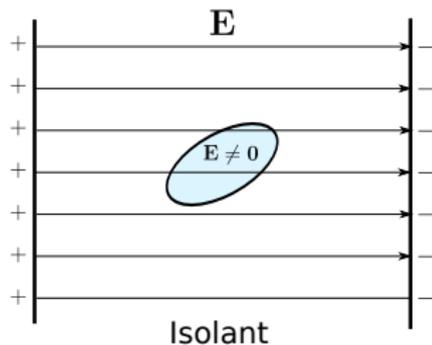
Champ électrique autour des conducteurs

Isolant : les charges sont fixes (plastique, verre, ...)

Conducteur : les charges sont libres de se déplacer (Au, Ag, Cu, Al, ...)

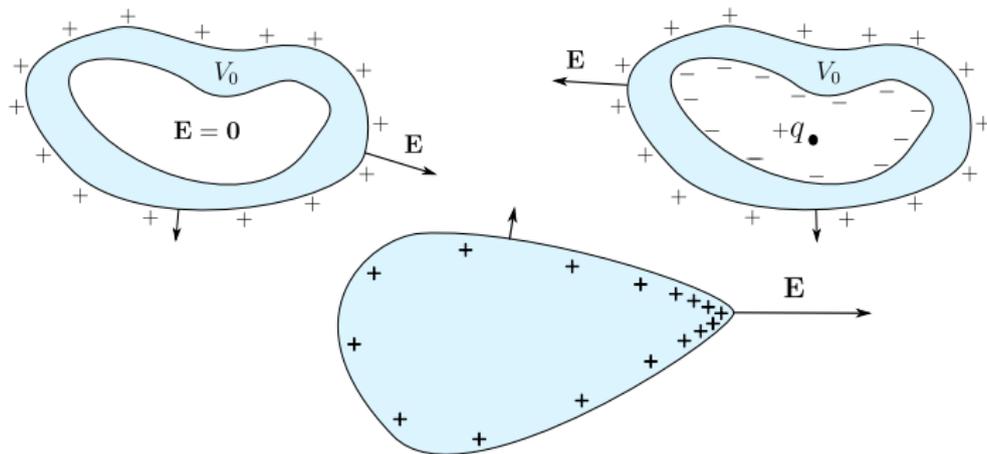
À l'équilibre,

- Le champ électrique \mathbf{E} à l'intérieur d'un conducteur est nul et le potentiel y est constant ainsi qu'en tout point de la surface. En effet, si $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, les charges $> 0 (< 0)$ migrent en direction du minimum (maximum) de potentiel, jusqu'à ce que le potentiel devienne homogène et $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Pour des métaux typiques, cette migration est très rapide (de l'ordre de $10^{-16} - 10^{-17}$ s).
- En tout point situé juste à l'extérieur d'un conducteur, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est normal à sa surface, et $E(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})/\epsilon_0$ où $\sigma(\mathbf{r})$ est la densité locale de charge de surface.



Champ électrique autour des conducteurs

- Dans une région creuse à l'intérieur d'un conducteur, $V(\mathbf{r})$ est constant et $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ si il n'y a pas de charges à l'intérieur de celle-ci. Ceci reste vrai pour des conducteurs chargés. Les milieux conducteurs permettent donc d'écranter le champ électrique. C'est le principe de la cage de Faraday.
- Une charge $+q$ à l'intérieur de la cavité induit une charge $+q$ sur la surface extérieure du conducteur.
- Le champ électrique est plus intense dans les régions à faible rayon de courbure.



Effet de pointe

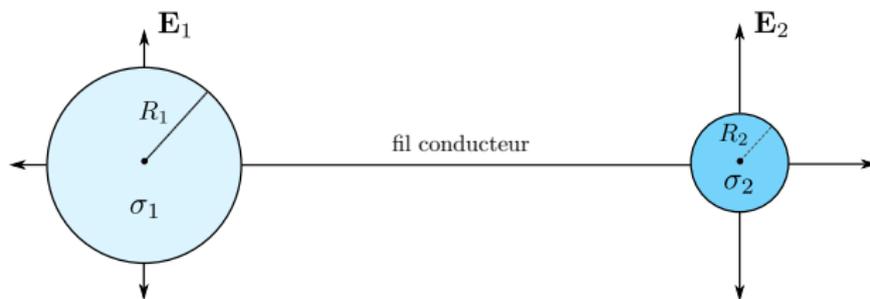
Les charges qui se distribuent à la surface d'un conducteur ont tendance à s'accumuler dans les régions à faible rayon de courbure. C'est l'effet de pointe sur lequel est basé le principe du paratonnerre. Considérons à titre d'exemple 2 sphères conductrices chargées, reliées entre elles par un fil conducteur ($V_1 = V_2$). Lorsque ces deux sphères sont fortement éloignées l'une de l'autre, nous avons en excellente approximation

$$V_1 \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \simeq V_2$$

$$E_1 \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1^2} \simeq \frac{V_1}{R_1}$$

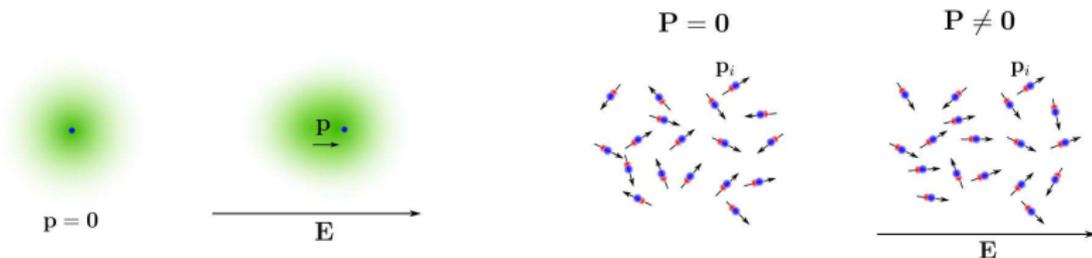
$$E_2 \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2^2} \simeq \frac{V_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{E_1}{E_2} \simeq \frac{R_2}{R_1}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \simeq \frac{R_2}{R_1}}$$



Mécanismes de polarisation de la matière

Lorsque la matière composée d'atomes/molécules est plongée dans un champ électrique \mathbf{E} , elle se *polarise*. Les molécules vont s'étirer (moments dipolaires induits) et, dans le cas où elles possèdent un moment dipolaire permanent, s'orienter dans le champ électrique.



Considérons un petit élément de volume ΔV , centré en \mathbf{r} , grand vis-à-vis des dimensions moléculaires, mais petits vis-à-vis des dimensions macroscopiques. Cet élément contient un moment dipolaire \mathbf{p} , qui est la somme des dipôles associés aux atomes ou aux molécules. On définit le vecteur polarisation \mathbf{P} par

$$\mathbf{p} = \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i = \mathbf{P}(\mathbf{r})\Delta V \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv \text{densité de moment dipolaire (en C.m}^{-2}\text{)}$$

Potentiel à l'extérieur du matériau

Le potentiel à l'extérieur du matériau peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}_f} \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_d} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}_f} \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_d} \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{S_d} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]
 \end{aligned}$$

avec les densités de charges induites par polarisation

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

$$\sigma_P(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

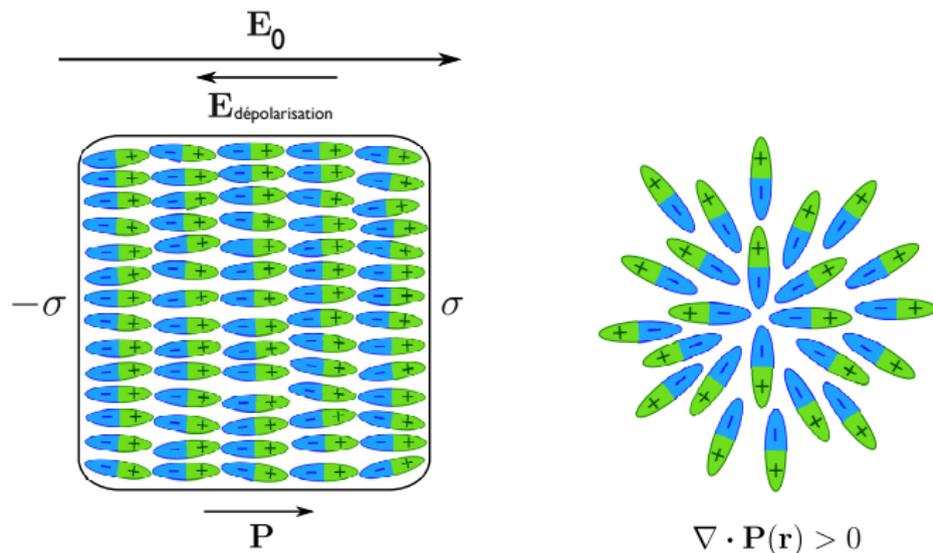
$\mathbf{n} \equiv$ normale extérieure au volume \mathcal{V}_d

Du point de vue du potentiel généré, le matériau est équivalent à une distribution volumique de charges (induites) $\rho_P(\mathbf{r})$ et à une distribution surfacique de charges (induites) $\sigma_P(\mathbf{r})$.

On peut montrer que le potentiel à l'*intérieur* du matériau prend la même forme pourvu que l'on moyenne les variations rapides qui apparaissent à l'échelle moléculaire.

Charges de polarisation

Un matériau isolant est constitué de dipôles mis bout à bout. Lorsque la polarisation est uniforme dans le matériau, le pôle négatif d'un dipôle étant très proche du pôle positif du dipôle suivant, et les charges étant égales en valeur absolue, il y a annulation de leurs effets à grande distance. Seuls, alors, les pôles positifs/négatifs sur les faces avant/arrière seront importants. Ce n'est rien d'autre que les charges induites à la surface du matériau. De plus, si la divergence du vecteur polarisation est différente de zéro en un endroit du matériau, il existe nécessairement une charge induite en volume à cet endroit.



Déplacement électrique \mathbf{D}

Dans un matériau, la loi de Gauss doit être modifiée pour tenir compte des charges induites. La distribution totale de charges est la superposition des charges libres (f) et des charges induites par polarisation (P)

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r})$$

En définissant le vecteur déplacement électrique par

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

on obtient un nouveau champ qui permet de réécrire la loi de Gauss pour ne faire intervenir que les charges libres. En effet, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_f$$

En tout point de la surface du matériau (sans charges libres de surface), la composante normale de \mathbf{D} est continue, ainsi que les composantes tangentielles de \mathbf{E} .

$$(\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Diélectrique – Susceptibilité électrique

En général, la polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ qui apparaît dans un matériau est en tout point proportionnelle au champ électrique (total) $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en ce point,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \simeq \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Un tel matériau est appelé diélectrique. Le coefficient sans dimension χ_e est la susceptibilité (di)électrique. Quelques valeurs usuelles sont données dans le tableau ci-dessous.

État	matière	χ_e [20°C]
–	vide	0
gaz	air	0.0006
gaz	eau	0.0126
liquide	eau	80
liquide	glycérine	41
solide	verre	6
solide	germanium	15

Déplacement électrique \mathbf{D} pour un diélectrique

Pour un matériau diélectrique, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \\ &\simeq \underbrace{\epsilon_0(1 + \chi_e)}_{\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

où ϵ est la permittivité du diélectrique. Il s'ensuit que l'intensité du champ électrique régnant dans une région de l'espace remplie d'un matériau diélectrique est réduite d'un facteur $(1 + \chi_e)$ par rapport à l'intensité du champ électrique appliqué (dans le vide). On dit que la polarisation du matériau donne lieu à un champ de dépolarisation qui s'oppose au champ appliqué. Le vecteur polarisation s'exprime en fonction du déplacement électrique par

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

L'équation de Poisson pour un matériau diélectrique devient

$$\Delta V(\mathbf{r}) \simeq -\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

Charge au centre d'une sphère diélectrique

Considérons une charge q au centre d'une sphère diélectrique de permittivité ϵ et de rayon R . La loi de Gauss généralisée donne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r & r > R \end{cases}$$

À l'intérieur de la sphère diélectrique, le champ électrique est inférieur au champ électrique qu'aurait généré la même charge dans le vide. Le champ électrique est discontinu au travers de la surface de la sphère, à l'inverse du vecteur déplacement $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$. La polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$ donne lieu à une densité volumique de charges nulle en tout point sauf à l'origine et une densité surfacique de charges constante et positive

$$\rho_P(r) = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} q \delta(\mathbf{r}) \qquad \sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \sigma_R$$

où $\sigma_R = q/(4\pi R^2)$ est la charge superficielle que l'on obtiendrait si la charge q était dispersée sur la surface de la sphère.

Énergie dans un diélectrique

En présence de diélectriques, on peut montrer que

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV$$

ce qui permet de définir une densité d'énergie électrostatique

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{2} E^2(\mathbf{r})$$

En la comparant à la densité d'énergie électrostatique u_0 dans le vide où règne un champ \mathbf{E}_0 , on remarque que la densité d'énergie électrostatique se trouve alors réduite d'un facteur $(1 + \chi_e)$ dans un diélectrique. En effet,

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)}{2} E^2(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_0^2(\mathbf{r})}{(1 + \chi_e)} = \frac{u_0(\mathbf{r})}{(1 + \chi_e)}$$

Cette réduction de l'énergie électrostatique dans un diélectrique permet de définir une force par unité de volume qui agit sur ceux-ci

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2} E^2(\mathbf{r}) \right) \Rightarrow \mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}_d} \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV$$

Champ magnétique

La force électromagnétique qui agit sur une particule chargée ne dépend pas uniquement de sa position mais également de sa vitesse. Elle peut être décomposée en deux forces :

- une force électrique qui ne dépend pas du mouvement de la charge mais uniquement de sa position → décrite par le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$
- une force, dite magnétique, qui dépend du mouvement de la charge

Cette force magnétique possède, à tout instant,

- une direction orthogonale au vecteur vitesse de la particule chargée et orthogonale à une direction indépendante des caractéristiques de la particule (celle du champ magnétique) → son travail est nul
- un module proportionnel à la charge électrique q et à la composante de la vitesse orthogonale à cette direction

Le champ magnétique \mathbf{B} (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1}$) est défini, en tout point de l'espace et à tout instant, au travers de la force électromagnétique totale que subit une charge en mouvement, que l'on écrit sous la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{force de Lorentz})$$

Sources de champs magnétiques

Un champ magnétique peut être créé par

- ~~des charges magnétiques (pas encore découvertes ...)~~
- des charges électriques en mouvement (un courant électrique)
- des moments dipolaires magnétiques intrinsèques (aimants permanents)
- des champs électriques variables dans le temps (correction de Maxwell à la loi d'Ampère)

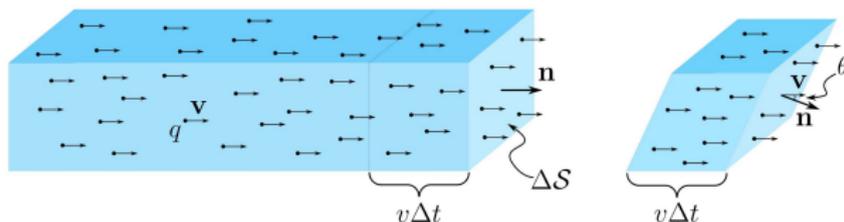
Densité de courant (électrique) \mathbf{j}

Un écoulement de charges peut être décrit par un champ vectoriel $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, appelé densité de courant (en $\text{C}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$), dont la direction est, en tout point, celle de l'écoulement des charges et dont l'amplitude correspond à la quantité de charges passant, par unité de surface et par unité de temps, au travers d'un élément de surface ΔS perpendiculaire à l'écoulement. Considérons, à un instant t , un élément de surface ΔS centré en \mathbf{r} . La quantité de charges Δq qui s'écoule en un temps Δt au travers de cet élément de surface vaut

$$\begin{aligned}\Delta q &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t && \text{(par définition)} \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$



Courant électrique I

Lorsqu'il y a plusieurs types de porteurs de charges (électrons, protons, ...),

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{j}_i(\mathbf{r}, t) = \sum_i \rho_i(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t)$$

Il est intéressant de noter que l'on peut avoir $\mathbf{j} = \sum_i \mathbf{j}_i \neq \mathbf{0}$ avec $\rho = \sum_i \rho_i = 0$. C'est d'ailleurs le cas pour un fil conducteur parcouru par un courant électrique. Ceci explique aussi que, bien que la force magnétique soit beaucoup plus faible que la force électrique si on considère seulement deux charges électriques q_1 et q_2 en interaction mutuelle ($F_e/F_m \sim v_1 v_2/c^2$), comme il est possible de mettre un très grand nombre de charges électriques en mouvement sans nécessairement dégager une charge électrique nette, la force magnétique exercée par un courant macroscopique peut complètement surpasser la force électrique.

Le courant électrique au travers d'une surface S (en $\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$), qui est la charge traversant S par unité de temps, est égal au flux de la densité de courant \mathbf{j} au travers de cette surface (orientée)

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

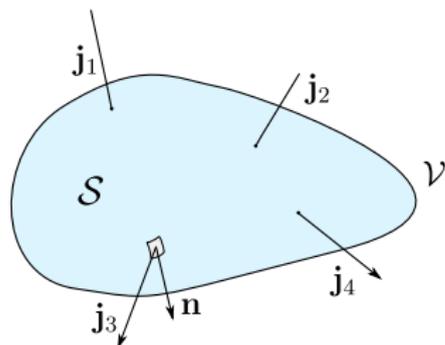
Équation de continuité – conservation locale de la charge

Expérimentalement, on observe que la charge électrique totale d'un système isolé est constante au cours du temps, ou encore que la charge électrique (nette) n'est jamais ni créée ni détruite.

Si on considère une surface fermée \mathcal{S} , la diminution (ou augmentation) de la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface doit résulter du passage des charges au travers de la surface. On en déduit l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

valable à tout instant et en tout point de l'espace.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour des } \underline{\text{courants constants}} : \\ \text{(magnétostatique)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{array} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0}$$

Loi de Biot et Savart (1820)

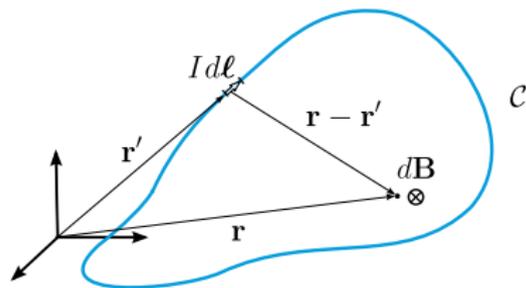
Suite à l'observation des influences mutuelles entre des fils parcourus par des courants constants, Biot et Savart postulent qu'un élément de courant $I d\ell$ situé en \mathbf{r}' produit, en tout point de l'espace, un champ magnétique

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\ell(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Principe de superposition

Le champ magnétique créé par une boucle (fermée) \mathcal{C} parcourue par un courant constant d'intensité I est donné, en tout point de l'espace, par

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} d\ell(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



Champ magnétique créé par une distribution de courants constants

Pour une distribution volumique de courants constants, on a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

où \mathcal{V} est la portion de l'espace contenant les charges en mouvement à l'origine des courants électriques.

Il s'ensuit que le champ magnétique créé par des courants électriques est in-divergentiel (on pense que c'est vrai en toute généralité, i.e. même pour des champs magnétiques $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ arbitraires, car personne n'a jamais observé de charges magnétiques dans la nature), soit

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

$\forall \mathbf{r}$

\Leftrightarrow

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

\forall surface fermée \mathcal{S}

Potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

En tout point de l'espace :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Interprétation et conséquences :

- La loi de Biot et Savart fait uniquement intervenir des charges électriques en mouvement, pas de charges magnétiques (et comme personne n'a jamais observé de charges magnétiques, sa densité est considérée nulle)
- Le flux de champ magnétique au travers d'une surface fermée est nul \Rightarrow conservation du flux magnétique le long des lignes de champ
- Le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla\chi(\mathbf{r})$$

$$\text{Jauge de Coulomb : } \nabla\chi(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} \text{ pour } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Loi d'Ampère

Le rotationnel du champ magnétique est en tout point de l'espace proportionnel à la densité de courant électrique

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

L'équation correspondante pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (dont dérive le champ magnétique) s'écrit, en jauge de Coulomb,

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

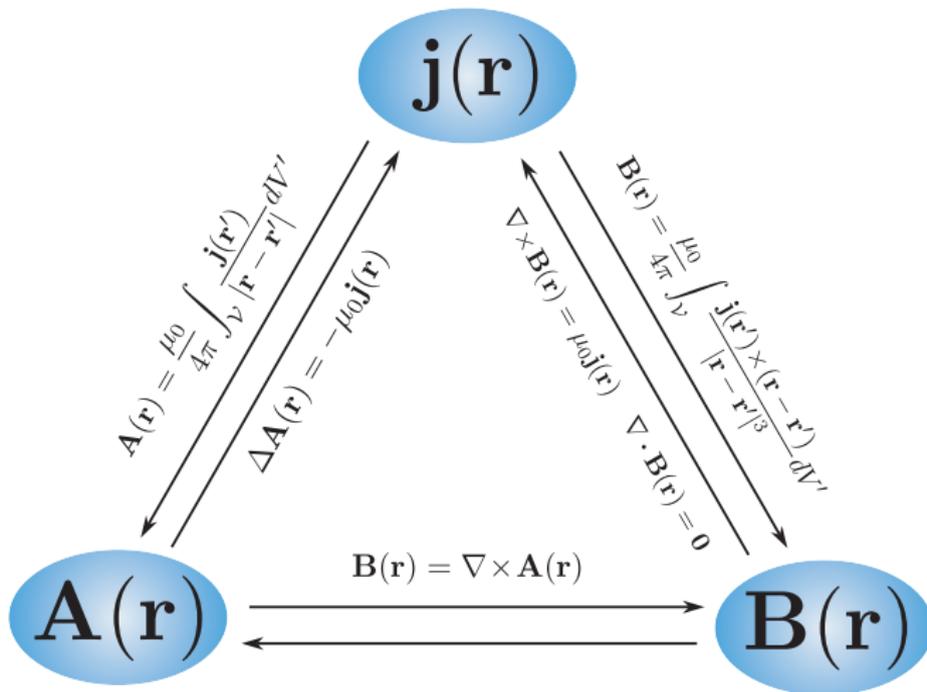
Loi d'Ampère

Considérons une surface \mathcal{S} , limitée par un contour \mathcal{C} , et traversée par un courant I (ce qui nécessite de choisir arbitrairement un sens pour la normale \mathbf{n} à la surface). On a (en respectant la règle de la main droite pour le sens de parcours de \mathcal{C})

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$$

(Ampère)

Magnétostatique $[\partial_t \mathbf{j} = 0, \partial_t \mathbf{B} = 0], \mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
 en jauge de Coulomb $[\nabla \cdot \mathbf{A} = 0]$



Analogie électrostatique – magnétostatique (en jauge de Coulomb)

Électrostatique $[\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0]$	Magnétostatique $[\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0]$
$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} dV'$ $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ $\Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ $\int_S \text{fermée} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $\oint_C \text{fermée} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3} dV'$ $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ $\int_S \text{fermée} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ $\oint_C \text{fermée} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$

Force magnétique sur une distribution de courants

La force magnétique que subit une particule ponctuelle de charge q et de vitesse $\mathbf{v}(t)$ plongée dans un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ est donnée par

$$\mathbf{F}_m(t) = q \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \quad (\text{Lorentz avec } \mathbf{E} = \mathbf{0})$$

où $\mathbf{r}(t)$ est la position de la particule à l'instant t .

Le long d'une boucle de courant, chaque élément de courant $I d\ell$ subit une force $d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} = I d\ell \times \mathbf{B}$, résultant en une force totale

$$\mathbf{F}_m(t) = \oint_c I d\ell \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Au sein d'une distribution volumique de courants, chaque élément de courant $\mathbf{j} dV$ subit une force $d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho dV \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV$, résultant en une force totale

$$\mathbf{F}_m(t) = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dV$$

Développement multipolaire magnétostatique

Le potentiel vecteur à l'extérieur ($r > r'_{\max}$) d'une distribution volumique de courants constants peut s'écrire sous la forme d'un développement en série

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{0} + \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right] \propto \frac{1}{r^2}$$

avec

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV$$

où le terme monopolaire est nul pour cause d'absence de charges magnétiques et où \mathbf{m} est appelé moment dipolaire magnétique de la distribution de courants.

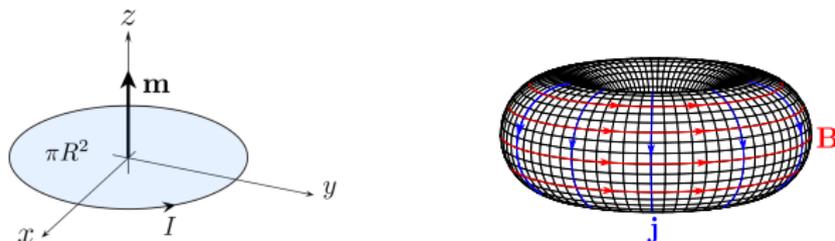
Dans le cas d'une boucle fermée \mathcal{C} confinée dans un plan et parcourue par un courant constant d'intensité I , \mathbf{m} prend la forme

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \times d\ell(\mathbf{r}) = IS\mathbf{n}$$

où S est la surface délimitée par la boucle \mathcal{C} et \mathbf{n} est la normale au plan contenant la boucle (orientée d'après le sens du courant).

Multipoles magnétiques

Dû au caractère vectoriel de la densité de courant, le développement multipolaire magnétique est plus complexe que son analogue électrostatique. En particulier, il fait apparaître des moments multipolaires dits toroïdaux (comme pour la distribution de courants illustrée à droite) non présents en électrostatique.



Une boucle circulaire de rayon R , contenue dans le plan $x - y$ et parcourue par un courant constant d'intensité I (circulant dans le sens trigonométrique vu depuis les $z > 0$), a un moment dipolaire magnétique $\mathbf{m} = \pi R^2 I \mathbf{e}_z$. Un dipôle ponctuel est défini par la double limite $R \rightarrow 0$, $I \rightarrow +\infty$, $\pi R^2 I = m$. Le champ magnétique d'un dipôle ponctuel est donné par

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \right)$$

où le terme avec la fonction delta garantit que $\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{dip}} = 0 \forall \mathbf{r}$.

Comparaison dipôles électrique-magnétique non ponctuels

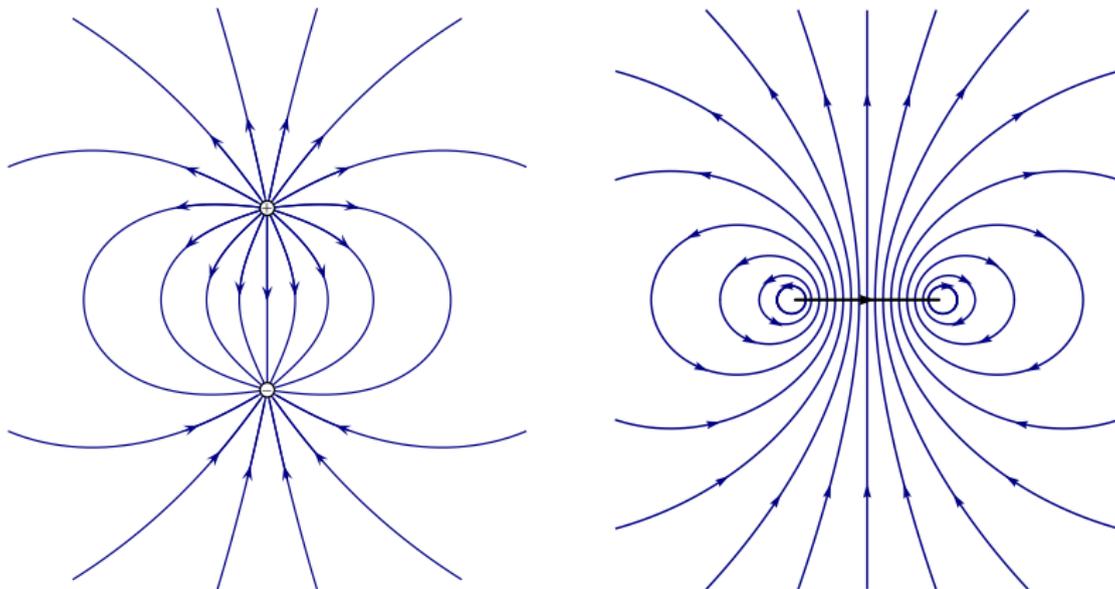


Fig. Lignes de champ électrique d'un dipôle électrique non ponctuel (à gauche)
Lignes de champ magnétique d'un dipôle magnétique non ponctuel (à droite).

Discontinuités possibles du champ magnétique

Une distribution volumique de courants avec une densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ finie en tout point de l'espace crée un potentiel vecteur et un champ magnétique

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

qui sont finis et continus en tout point de l'espace. Toutefois, en présence de courants de surface (comme sur des conducteurs superficiels), \mathbf{B} peut présenter des discontinuités.

La composante du champ magnétique tangente à une surface parcourue par un courant (densité superficielle de courant $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ en $\text{C.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$) subit une discontinuité au travers de cette surface. La composante normale du champ magnétique est par contre toujours continue.

En tout point de la surface, nous avons les relations

$$(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

Énergie potentielle d'un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique (ponctuel) plongé dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est soumis à un couple de force

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

L'énergie potentielle de rotation du dipôle magnétique est donnée par

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

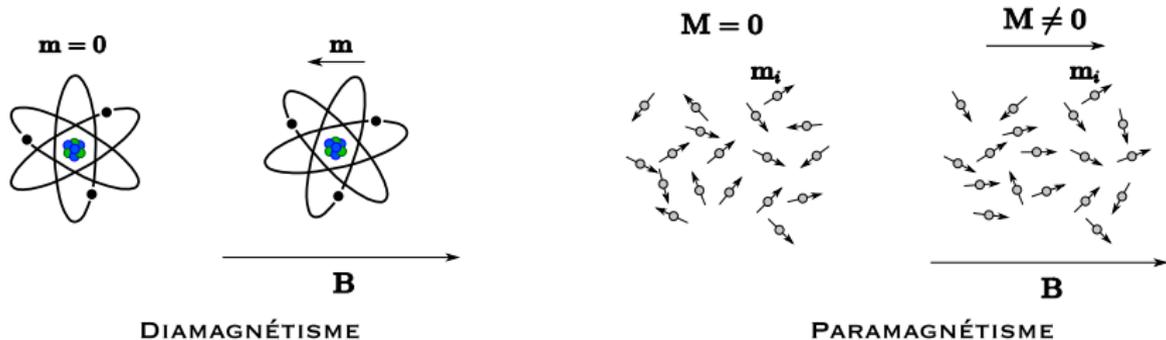
Dans un champ magnétique non-uniforme, le dipôle magnétique est soumis à une force

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}))$$

- Moment dipolaire parallèle au champ extérieur : la force agit dans la direction où l'intensité du champ augmente
- Moment dipolaire antiparallèle au champ extérieur : la force agit dans la direction où l'intensité du champ décroit
- Champ extérieur uniforme : force nulle

Mécanismes de magnétisation de la matière

Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique \mathbf{B} , il y a apparition d'un moment magnétique macroscopique induit. Si les atomes/molécules possèdent un moment magnétique permanent, ils vont s'orienter de manière préférentielle parallèlement au champ magnétique appliqué (paramagnétisme). Dans tous les cas (moment magnétique permanent ou pas), l'application d'un champ magnétique a pour effet de conférer au nuage électronique de chaque atome un mouvement de rotation supplémentaire qui va induire un moment magnétique (diamagnétisme). D'après la loi de Lenz, ce moment magnétique induit s'oppose au champ \mathbf{B} qui lui a donné naissance.



Magnétisation/aimantation \mathbf{M}

Considérons un petit élément de volume ΔV , centré en \mathbf{r} , grand vis-à-vis des dimensions atomiques, mais petits vis-à-vis des dimensions macroscopiques. Cet élément contient un moment dipolaire magnétique \mathbf{m} , qui est la somme des dipôles \mathbf{m}_i associés aux atomes ou aux molécules. On définit la magnétisation (ou encore aimantation) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ en tout point du matériau par

$$\mathbf{m} = \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i = \mathbf{M}(\mathbf{r})\Delta V$$

$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv$ densité de moment dipolaire magnétique (A.m^{-1})

Remarque

Les particules qui constituent la matière qui nous entoure (électrons, protons et neutrons) possèdent un moment magnétique intrinsèque, appelé moment magnétique de spin. L'explication des propriétés magnétiques de la matière ne peut se faire que dans le cadre de la mécanique quantique en tenant compte de ces moments magnétiques intrinsèques.

Potentiel vecteur à l'extérieur du matériau

Le potentiel vecteur à l'extérieur du matériau peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\mathcal{V}_m} \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{S_m} \frac{\mathbf{K}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \end{aligned}$$

avec les densités de courants induits

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{K}_M(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}$$

$\mathbf{n} \equiv$ normale extérieure au volume \mathcal{V}_m

On voit donc que le matériau est équivalent (au niveau du potentiel vecteur généré) à une distribution volumique de courants (induits) $\mathbf{j}_M(\mathbf{r})$ et à une distribution surfacique de courants (induits) $\mathbf{K}_M(\mathbf{r})$.

On peut montrer que le potentiel vecteur à l'intérieur du matériau prend la même forme si on moyenne les variations rapides qui apparaissent à l'échelle atomique.

Champ magnétique \mathbf{H} – Induction magnétique \mathbf{B}

Comme la magnétisation \mathbf{M} induit un courant \mathbf{j}_M qui s'ajoute au courant des charges libres \mathbf{j}_f , on a

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_M(\mathbf{r})$$

On introduit alors le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ par

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

qui permet de réécrire la loi d'Ampère pour ne faire intervenir que les courants libres

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_f$$

En tout point de la surface du matériau (sans courant libre de surface), les composantes tangentielles de \mathbf{H} sont continues, ainsi que la composante normale de \mathbf{B} .

$$(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Susceptibilité magnétique

En général, l'aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ qui apparaît dans un matériau est en tout point proportionnelle à l'induction magnétique (totale) $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. L'usage veut qu'on écrive une relation de proportionnalité entre l'aimantation \mathbf{M} et le champ magnétique \mathbf{H} , soit

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \simeq \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

où χ_m est appelé la susceptibilité magnétique du matériau (nombre sans dimension). Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 (\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})) \\ &\simeq \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

où μ est la perméabilité du matériau (μ_0 étant appelé perméabilité du vide). On distingue trois comportements selon la valeur de χ_m

- $\chi_m < 0 \Leftrightarrow \mu < \mu_0 \Rightarrow |\mathbf{B}| < \mu_0 |\mathbf{H}|$ (*diamagnétisme*)
- $\chi_m > 0 \Leftrightarrow \mu > \mu_0 \Rightarrow |\mathbf{B}| > \mu_0 |\mathbf{H}|$ (*paramagnétisme*)
- $\chi_m = \chi_m(|\mathbf{B}|)$ (*ferromagnétisme*)

Susceptibilité magnétique

matière	χ_m [20°C]	statut
vide	0	—
eau	-0.9×10^{-5}	dia
Bi	-16.6×10^{-5}	dia
C	-2.1×10^{-5}	dia
O ₂	0.19×10^{-5}	para
Al	2.1×10^{-5}	para
Pt	28×10^{-5}	para

Pour les matériaux paramagnétiques, composés d'atomes (ou molécules) présentant un moment magnétique permanent, l'effet diamagnétique est toujours présent mais il est masqué par l'effet paramagnétique.

Les matériaux ferromagnétiques (Fe, Co, Ni, Fe₃O₄, ...) présentent une aimantation non nulle de manière permanente (en l'absence de champ magnétique appliqué) et des susceptibilités magnétiques très élevées ($\chi_m \sim 100$).

Retour sur la loi de Gauss

La loi de Gauss pour le champ électrostatique peut s'écrire sous la forme

$$q_{\text{int}} = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Elle découle directement de la loi de Coulomb pour la force électrique entre deux charges ponctuelles au repos et montre que la mesure (du flux) du champ électrique créé par une particule permet d'en déterminer la charge.

Par extension, la charge électrique d'une particule en mouvement est définie au travers de la loi de Gauss dépendante du temps,

$$q_{\text{int}} = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

bien que dans ce cas, le champ électrique possède une forme plus compliquée que celui créé par une charge ponctuelle au repos. L'expérience montre que la charge électrique définie plus haut est une caractéristique intrinsèque des particules fondamentales, quelque soit leur état de mouvement. C'est le principe d'invariance de la charge.

Charge électrique d'une particule en mouvement

La charge électrique d'une particule ne dépend pas de son état de mouvement. Elle a la même valeur pour tous les observateurs inertiels (c'est un invariant scalaire).

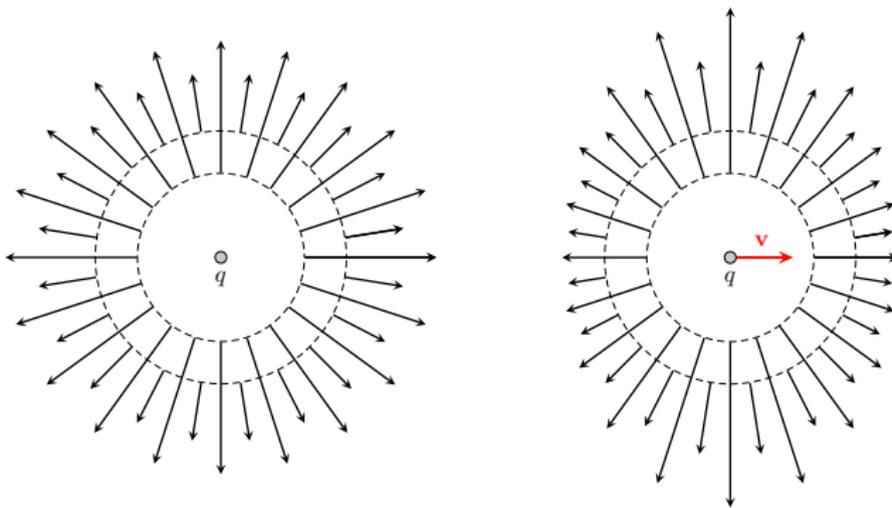


Fig. Champ électrique (a) d'une particule chargée au repos, (b) d'une particule chargée en MRU ($v = 0.6c$). Dans les deux cas, $q = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS > 0$.

Loi d'induction de Faraday - boucle stationnaire

En 1831, Faraday découvre qu'une variation de flux de champ magnétique au travers d'une boucle conductrice fermée et stationnaire \mathcal{C} induit un courant dans celle-ci. Il en déduit qu'un champ magnétique variable induit un champ électrique, à l'origine du courant. Expérimentalement, on trouve que le courant résulte d'une force électromotrice $\mathcal{E}_{\text{stat}}$ (un scalaire noté fem et exprimé en J/C) obéissant à la loi de Faraday

$$\mathcal{E}_{\text{stat}}(t) \equiv \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt} \Big|_{\text{du aux variations de } \mathbf{B}}$$

où

$$\phi_{\mathbf{B}} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

est le flux de champ magnétique au travers de la boucle stationnaire. L'expérience montre que la loi de Faraday est valable en toute généralité, même pour des boucles immatérielles.

Le signe de $\mathcal{E}_{\text{stat}}$ est donné par la loi de Lenz : la force électromotrice induit un courant qui crée un flux magnétique s'opposant à la variation de flux imposée.

Loi d'induction de Faraday - boucle en mouvement

Dans le cas d'une boucle en mouvement à la vitesse \mathbf{v} , la force électromotrice totale est donnée par $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{stat}} + \mathcal{E}_{\mathbf{v}}$ avec

$$\mathcal{E}_{\mathbf{v}} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \left. \frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt} \right|_{\text{du au mouvement}}$$

La contribution $\mathcal{E}_{\mathbf{v}}$ trouve son origine physique dans la force magnétique qui agit sur les porteurs de charge en mouvement (cas des boucles conductrices).

En utilisant l'identité mathématique

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\mathbf{v}}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

valable pour tout champ vectoriel différentiable \mathbf{B} , où $S_{\mathbf{v}}$ (S) est la surface en mouvement (stationnaire), la loi de Faraday prend la forme différentielle

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

valable en tout point de l'espace et à tout instant.

Loi d'induction de Faraday

Analogie Faraday - Ampère

En l'absence de charges électriques ($\rho(\mathbf{r}, t) = 0$), nous avons

$$\begin{array}{ccc} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) & & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 & \longleftrightarrow & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ & \text{même forme} & \end{array}$$

Le champ électrique induit possède donc, à chaque instant t , la même forme que le champ magnétique qu'aurait généré une distribution de courant de densité $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / \mu_0$.

Contrairement au cas statique, le champ électrique ne dérive plus simplement d'un potentiel scalaire. Nous avons à présent

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

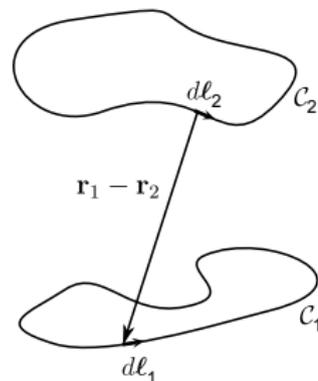
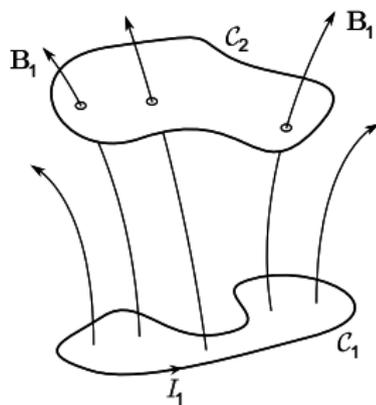
On remarque que si dans le cas statique les phénomènes électriques et magnétiques sont totalement découplés, une dépendance temporelle lie automatiquement et intimement ces deux types de phénomènes.

Inductance

Considérons un circuit C_1 parcouru par un courant constant d'intensité I_1 . Le champ magnétique généré par ce circuit est proportionnel au courant I_1 et il en va de même du flux magnétique au travers d'un second circuit C_2 . On a

$$\phi_2 = M_{21} I_1 \quad \text{où} \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = M_{12}$$

est appelé coefficient d'induction mutuelle. Ce coefficient, généralement noté M , ne dépend que de la forme et de la position des circuits.



Self-inductance L

Lorsqu'on fait varier l'intensité du courant dans le circuit \mathcal{C}_1 , le flux magnétique au travers du circuit \mathcal{C}_2 varie, donnant naissance à une force électromotrice \mathcal{E}_2 dans \mathcal{C}_2 (d'après la loi de Faraday)

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Il est clair que ce changement de courant induit également une force électromotrice dans le circuit \mathcal{C}_1 lui-même. À nouveau, le champ (et donc le flux) magnétique est proportionnel au courant,

$$\phi = LI \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

où L est appelée la self-inductance du circuit (en V.s.A^{-1} ou H). C'est une quantité intrinsèquement positive qui joue le même rôle dans les circuits électriques que la masse dans les systèmes mécaniques : plus L est grand, plus il est difficile de changer l'intensité du courant de la même manière que plus la masse d'un objet est grande, plus il est difficile d'en changer la vitesse.

Énergie d'une distribution de courants (constants)

Le travail W que nous devons fournir pour augmenter l'intensité du courant dans un circuit (de résistance nulle) est le travail nécessaire pour vaincre la force électromotrice qui apparaît dans le circuit (suite à cette augmentation)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow U = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\phi_m = LI \Rightarrow U = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot (I d\boldsymbol{\ell})$$

L'expression pour une distribution volumique de courants s'écrit

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad \text{ou encore} \quad U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} B^2(\mathbf{r}) dV$$

Interprétation

L'énergie U d'un système de courants (constants) est disséminée dans tout l'espace où règne un champ magnétique avec une densité

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r})$$

Modification de Maxwell de la loi d'Ampère (1865)

La loi d'Ampère a été établie en étudiant le champ magnétique créé par des courants constants. Elle n'est plus valable pour des courants variables. En effet,

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \stackrel{\text{Ampère}}{=} \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{équation de continuité}}{=} -\mu_0 \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \stackrel{\text{Gauss}}{=} -\nabla \cdot \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \neq 0$$

Maxwell proposa, sans justification expérimentale mais en grande partie pour des raisons de symétrie, d'ajouter un terme à la loi d'Ampère qui la rend compatible avec l'équation de continuité. De la même façon qu'un champ magnétique variable induit un champ électrique (Faraday), Maxwell postula qu'un champ électrique variable induit un champ magnétique. Il écrivit

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

La confirmation expérimentale de la théorie de Maxwell dû attendre de nombreuses années, jusqu'à l'observation des ondes électromagnétiques par Hertz en 1887 (après la mort de Maxwell).

Équations de Maxwell dans le vide (1873)

And God said

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\nexists \text{ charges magn.})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{Faraday})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Ampère-Maxwell})$$

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{Lorentz})$$

and then there was light

Vitesse de la lumière dans le vide pour tous les observateurs inertiels :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Équations de Maxwell (1873)

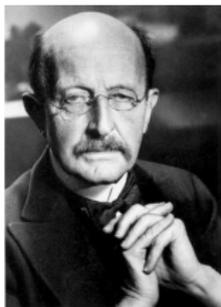


Boltzmann (1844–1906)

« Fût-ce un Dieu qui écrivit ces signes ? »



Maxwell (1831–1879)



Max Planck (1858–1947)

"When I began my physical studies and sought advice from my venerable teacher Philipp von Jolly... he portrayed to me physics as a highly developed, almost fully matured science... Possibly in one or another nook there would perhaps be a dust particle or a small bubble to be examined and classified, but the system as a whole stood there fairly secured, and theoretical physics approached visibly that degree of perfection which, for example, geometry has had already for centuries."

Quelques propriétés des équations de Maxwell (I)

- Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles pour les champs du premier ordre par rapport au temps et aux coordonnées spatiales (en ce sens, la “coordonnée temporelle” t et les coordonnées spatiales x, y, z sont traitées sur un pied d'égalité, soulignant le caractère relativiste de ces équations).
- Il convient d'ajouter aux équations de Maxwell des conditions aux limites physiques, en général $\mathbf{E}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0}$ à grande distance d'une distribution localisée de charges connue.
- Les équations de Maxwell en l'absence de sources admettent des solutions dynamiques \rightarrow les champs acquièrent une existence propre !
- A l'instar de toutes les lois de la physique classique, les équations de Maxwell sont déterministes et réversibles. Connaissant les sources $\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (i.e. en tout point de l'espace et à tout instant) et les champs en tout point de l'espace à un instant donné, les équations de Maxwell permettent de prédire avec certitude l'évolution future ou antérieure des champs. Toute l'information sur l'état futur ou passé est donc contenue dans l'état présent (« loi de conservation de l'information »).

Quelques propriétés des équations de Maxwell (II)

- Les équations de Maxwell sont linéaires (\Rightarrow principe de superposition).
 - \rightarrow Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ sont solutions des équations de Maxwell en l'absence de sources ($\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$), alors toute combinaison linéaire $(c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2, c_1\mathbf{B}_1 + c_2\mathbf{B}_2)$ est solution des équations de Maxwell en l'absence de sources.
 - \rightarrow Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ et $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ sont solutions des équations de Maxwell pour les sources (ρ_1, \mathbf{j}_1) et (ρ_2, \mathbf{j}_2) respectivement, alors toute combinaison linéaire $(c_1\mathbf{E}_1 + c_2\mathbf{E}_2, c_1\mathbf{B}_1 + c_2\mathbf{B}_2)$ est solution des équations de Maxwell pour les sources $(c_1\rho_1 + c_2\rho_2, c_1\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{j}_2)$.
- Les équations de Maxwell conduisent à la loi de conservation locale de la charge (\rightarrow équation de continuité reliant les densités de charge et de courant, voir page 94).
- Les équations de Maxwell conduisent à la loi de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour le système « particules chargées + champs » (\rightarrow théorème de Poynting, voir page 140).
- Les équations de Maxwell sont invariantes sous transformations de Lorentz.

Quelques propriétés des équations de Maxwell (III)

- La dynamique du système « particules chargées + champs » est régie par les équations de Maxwell supplémentées des équations de Newton-Lorentz pour les particules chargées :

$$\frac{d\mathbf{p}_i(t)}{dt} = q_i (\mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t), t) + \mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i(t), t))$$

Connaissant les positions et les vitesses initiales des particules $\{\mathbf{r}_i(0), \mathbf{v}_i(0)\}$ et la valeur initiale des champs en tout point de l'espace, les équations de Maxwell et de Newton-Lorentz permettent de prédire avec certitude l'évolution future (ou antérieure) du système « particules + champs ». Au cours de cette évolution, **les champs dictent aux particules comment se déplacer et les particules dictent aux champs comment varier.**

- Si, un jour, l'existence de monopôles magnétiques est établie, il conviendra d'adapter la loi de Gauss magnétique et la loi de Faraday comme suit : $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \rho_m(\mathbf{r}, t)$ et $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)$ où ρ_m et \mathbf{j}_m sont les densités de charges magnétiques et de courants magnétiques.

Équations de Maxwell sous forme intégrale

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{MW1})$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{MW2})$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{MW3})$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{MW4})$$

Flux de \mathbf{E} au travers d'une surface fermée = (Charge englobée par la surface)/ ϵ_0

Flux de \mathbf{B} au travers d'une surface fermée = 0

Circulation de \mathbf{E} sur une boucle fermée = $-\frac{d}{dt}$ (Flux de \mathbf{B} au travers de la boucle)

Circulation de \mathbf{B} sur une boucle fermée = μ_0 (Courant au travers de la boucle)
 $+\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}$ (Flux de \mathbf{E} au travers de la boucle)

Arnold Sommerfeld : "The general development of Maxwell's theory must proceed from its differential form ; for special problems the integral form may, however, be more advantageous".

Potentiels électromagnétiques

Les champs électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ peuvent s'exprimer à partir des potentiels électromagnétiques $V(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Sous cette forme, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} satisfont automatiquement aux équations (MW2) et (MW3). Les deux équations de Maxwell restantes sont alors équivalentes aux équations (du second ordre) pour les potentiels V et \mathbf{A} ,

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Ces dernières peuvent être simplifiées en fixant la jauge de manière judicieuse.

Invariance de jauge (locale)

Il est en effet possible d'exécuter une transformation de jauge locale sur les potentiels électromagnétiques qui laisse invariants les champs électrique et magnétique

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ V' = V - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}' = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{array} \right.$$

où $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ est un champ scalaire quelconque (suffisamment dérivable).

Les potentiels électromagnétiques n'ont pas la même réalité physique que les champs électromagnétiques. Les champs peuvent être déterminés localement par une mesure directe de la force de Lorentz s'exerçant sur des particules chargées, au contraire des potentiels qui ne sont pas définis univoquement à partir des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . Quel est donc l'intérêt de recourir aux potentiels électromagnétiques ? Le fait est que les potentiels sont nécessaires pour pouvoir exprimer les équations du mouvement sous forme lagrangienne (principe d'action stationnaire) ou hamiltonienne. Bien que les phénomènes physiques sont invariants de jauge, le formalisme lagrangien ou hamiltonien requiert leur introduction. De plus, la propriété d'invariance de jauge locale apparaît en physique moderne comme un principe général que doit vérifier toute théorie sensée décrire les interactions fondamentales (électromagnétiques, électrofaibles, fortes, ...).

Jauges de Coulomb et de Lorenz

Il est toujours possible d'effectuer une transformation de jauge de manière à satisfaire à la condition de jauge de Coulomb ou de Lorenz :

<u>Jauge de Coulomb</u>	<u>Jauge de Lorenz</u>
$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

Si une de ces deux conditions est satisfaite à un instant donné, alors elle l'est à tout instant. De plus, les conditions précédentes ne fixent pas totalement la jauge.

La jauge de Coulomb est à privilégier lorsqu'on cherche une interprétation physique cohérente avec les origines des champs dans le problème étudié. Quant à la jauge de Lorenz, elle est adaptée au formalisme relativiste dans lequel \mathbf{A} et V sont traités sur un pied d'égalité.

Équations d'ondes

Les équations de Maxwell dans le vide et en l'absence de sources s'écrivent

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\mathbf{E} \text{ transverse})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\mathbf{B} \text{ transverse})$$

On remarque que les deux lignes sont reliées entre elles par la substitution $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}c$ et $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}/c$. Il s'ensuit que les équations de Maxwell mènent à la même équation d'ondes (à 3 dimensions) pour \mathbf{E} et \mathbf{B} .

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$
$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

Ces équations possèdent des solutions dynamiques, signifiant que les champs électrique et magnétique peuvent avoir une existence propre, i.e. indépendante de la présence de charges (ex : $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$). Les ondes électromagnétiques sont des ondes vectorielles transverses.

Ondes électromagnétiques planes

Cherchons des solutions d'ondes planes monochromatiques progressives

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right], \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

où \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 sont des vecteurs réels et constants et \mathbf{k} est le vecteur d'onde qui donne à la fois la direction de propagation et la périodicité spatiale de l'onde $\lambda = 2\pi/k$. La fréquence ω donne la périodicité temporelle de l'onde $T = 2\pi/\omega$. Ces ondes planes sont solutions des équations d'ondes à condition que

$$k^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \equiv c$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est donc égale à la vitesse de la lumière dans le vide c quelque soit leur fréquence. En outre, les vecteurs \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 doivent vérifier les relations

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \omega \mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \quad (\Rightarrow cB_0 = E_0)$$

Les vecteurs $(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ forment un repère droit (ou dextrorsum). Les ondes électromagnétiques planes sont donc des ondes vectorielles transverses (2 polarisations possibles). De plus, la forme des équations de Maxwell impose que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} soient toujours en phase.

Ondes électromagnétiques



J. C. Maxwell (1831–1879)

"We can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena."



H. R. Hertz (1857–1894)

Hertz did not realize the practical importance of his experiments. He stated that,

"It's of no use whatsoever[...] this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right - we just have these mysterious electromagnetic waves that we cannot see with the naked eye. But they are there."

Asked about the ramifications of his discoveries, Hertz replied, "Nothing, I guess."

Polarisations linéaires et circulaires

Soit une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$. Il est commode de considérer des vecteurs $\mathbf{E}_0 = E_0 \boldsymbol{\varepsilon}$ complexes, où $E_0 = |E_0|e^{i\phi}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un vecteur polarisation complexe, avec la convention que les champs physiques sont obtenus en prenant la partie réelle des champs complexes.

Onde polarisée linéairement :

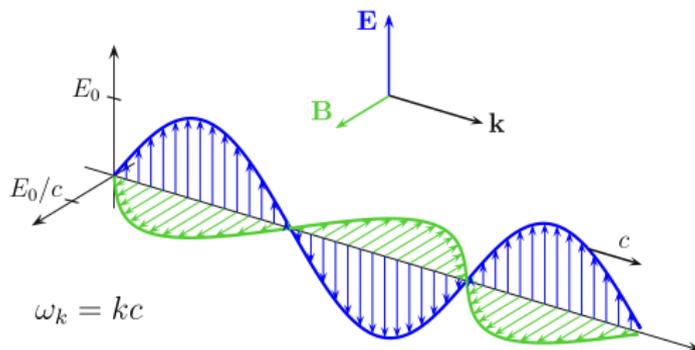
- $\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y$: vecteur polarisation linéaire, réel ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) et unitaire ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$).
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[E_0 \boldsymbol{\varepsilon} e^{i(kz - \omega t)} \right] = |E_0| \boldsymbol{\varepsilon} \cos(kz - \omega t + \phi)$

Onde polarisée circulairement :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y)$: vecteurs polarisations circulaires gauche (+) et droite (-), complexes et unitaires.
- $\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[E_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} e^{i(kz - \omega t)} \right]$
 $= \mp \frac{|E_0|}{\sqrt{2}} [\cos(kz - \omega t + \phi) \mathbf{e}_x \mp \sin(kz - \omega t + \phi) \mathbf{e}_y]$

Onde électromagnétique plane de polarisation linéaire

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} de l'onde électromagnétique oscillent en phase. Ils sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au vecteur d'onde \mathbf{k} qui donne la direction de propagation de l'onde. L'onde est dite polarisée linéairement dans la direction de son champ électrique et le plan (\mathbf{E}, \mathbf{k}) est le plan de polarisation. La configuration des champs à un instant donné est illustrée ci-dessous.

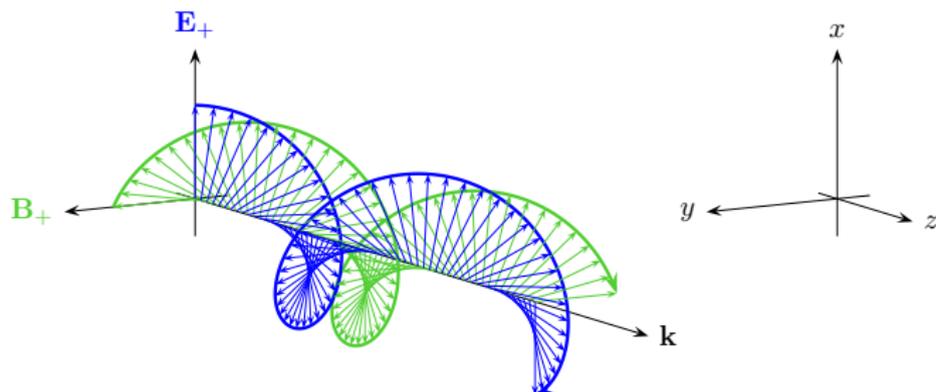


$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \frac{\mathbf{E}_0}{c} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$$

Les équations de Maxwell expliquent comment ces ondes peuvent se propager physiquement à travers l'espace en l'absence de milieu (d'éther). Les champs étant variables à la fois spatialement et temporellement, le champ magnétique (électrique) variable temporellement (spatialement) s'accompagne d'un champ électrique (magnétique) variable spatialement (temporellement) d'après la loi de Faraday. En même temps, le champ électrique (magnétique) variable temporellement (spatialement) s'accompagne nécessairement d'un champ magnétique (électrique) variable spatialement (temporellement) d'après la loi de Ampère-Maxwell. Ces variations auto-entretenues des champs sont à l'origine des ondes électromagnétiques, forcées de constamment se propager (à la vitesse de la lumière c) pour continuer à exister.

Onde électromagnétique plane de polarisation circulaire

Dans le cas d'une onde électromagnétique de polarisation circulaire droite (hélicité positive), un observateur fixe faisant face à l'onde incidente voit le vecteur champ électrique tourner dans le sens trigonométrique (convention des quanticiens). La configuration des champs à un instant donné est illustrée ci-dessous.

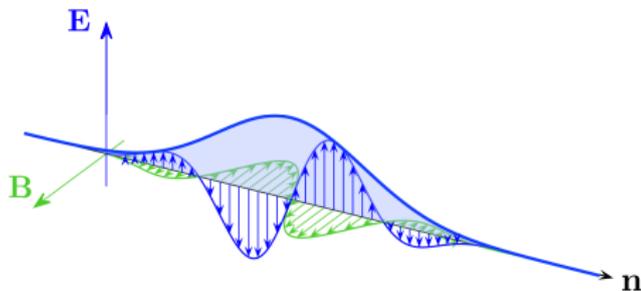


$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z, \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = -\frac{|E_0|}{\sqrt{2}} [\cos(kz - \omega_k t) \mathbf{e}_x - \sin(kz - \omega_k t) \mathbf{e}_y]$$

$$\mathbf{B}_+(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \frac{\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t)}{c}$$

Onde plane non-monochromatique : paquet d'ondes

Une onde plane non-monochromatique sous la forme d'un paquet d'ondes localisé dans sa direction de propagation est aussi solution des équations de Maxwell si les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} oscillent en phase, sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation de l'onde, spécifiée par un vecteur unitaire \mathbf{n} . Le cas d'une polarisation linéaire est illustré ci-dessous.

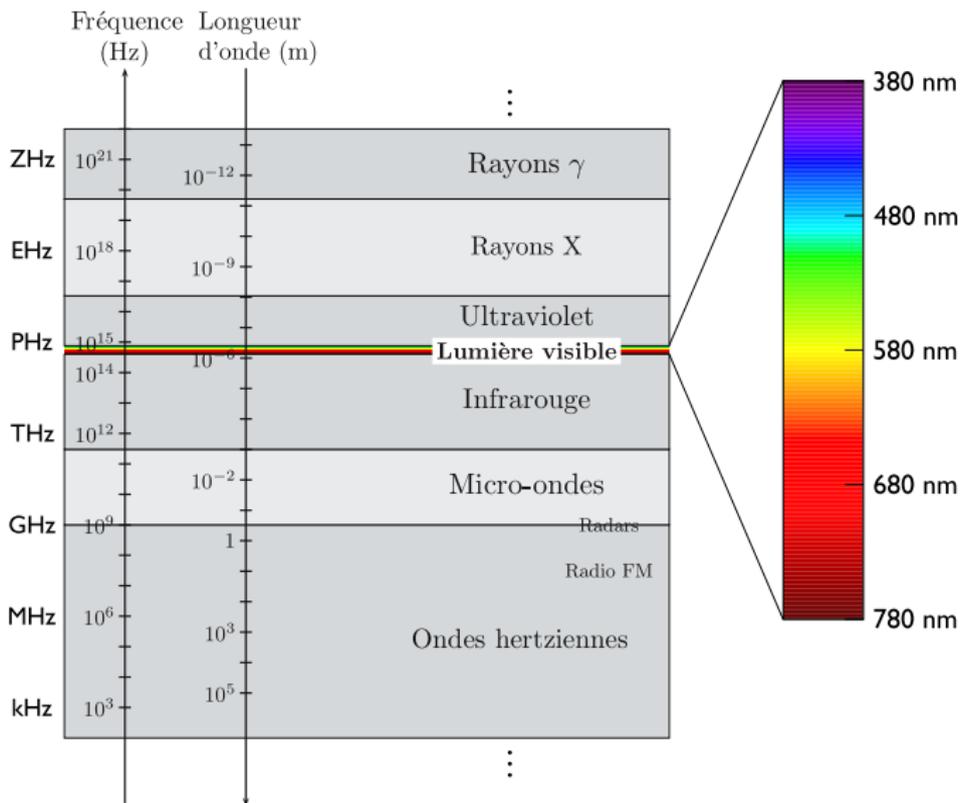


Plus précisément, les champs électromagnétiques

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{E}_0}{c} f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

se déplaçant à la vitesse de la lumière c dans la direction et le sens du vecteur unitaire \mathbf{n} , sans déformation, sont solutions des équations de Maxwell en l'absence de sources. La fonction f détermine la forme du paquet d'ondes électromagnétiques.

Spectre électromagnétique



Potentiels retardés

En jauge de Lorenz, les potentiels électromagnétiques obéissent à des équations d'ondes découplées

$$\square V(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \text{où } \square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ est}$$

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \text{l'opérateur des ondes}$$

(ou d'Alembertien).

Les solutions physiques (qui respectent la causalité) de ces équations d'ondes sont données, pour des sources localisées, par les potentiels retardés

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t_r = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t_r = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

où $t - t_r$ représente le temps que met l'information sur la présence de charges et de courants en \mathbf{r}' à se propager jusqu'en \mathbf{r} à la vitesse de la lumière c .

Théorème de Poynting : conservation de l'énergie

Le théorème de Poynting exprime la conservation de l'énergie totale. Désignons par $U_{\text{méc}}$ l'énergie mécanique (cinétique, potentielle gravifique, ...) d'un ensemble de particules contenues dans un volume \mathcal{V} . Si aucune particule ne sort du volume, nous avons

$$\frac{d(U_{\text{ém}} + U_{\text{méc}})}{dt} = - \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$$

où $U_{\text{ém}} = U_{\text{ém}}(t)$ représente l'énergie du champ électromagnétique contenu dans le volume \mathcal{V} à l'instant t ($u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t)$ étant la densité d'énergie),

$$U_{\text{ém}}(t) = \int_{\mathcal{V}} u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) dV$$

avec

$$u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \frac{B^2(\mathbf{r}, t)}{2\mu_0}$$

et \mathbf{S} est le vecteur de Poynting qui représente l'énergie par unité de temps et par unité de surface transportée par le champ ($[S] = \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$),

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Conservation de l'impulsion

Désignons par $\mathbf{P}_{\text{méc}}$ l'impulsion mécanique totale d'un ensemble de particules contenues dans un volume \mathcal{V} . La conservation de l'impulsion totale (champs + particules) s'écrit (pour la composante $i = x, y, z$)

$$\frac{d(\mathbf{P}_{\text{ém}} + \mathbf{P}_{\text{méc}})_i}{dt} = \int_S (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_i dS = \int_S \sum_{j=x,y,z} T_{ij} n_j dS$$

où $\mathbf{P}_{\text{ém}} = \mathbf{P}_{\text{ém}}(t)$ désigne l'impulsion du champ électromagnétique contenu dans le volume \mathcal{V} à l'instant t ($\mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t)$ étant la densité d'impulsion),

$$\mathbf{P}_{\text{ém}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) dV$$

avec

$$\mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$$

et où \mathbf{T} est le tenseur (d'ordre 2) des contraintes de Maxwell, de composantes

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{E^2}{2} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{B^2}{2} \delta_{ij} \right)$$

Énergie et impulsion dans les ondes électromagnétiques

Considérons une onde plane progressive, monochromatique et polarisée linéairement se propageant selon Oz (vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$, pulsation $\omega_k = kc$),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega_k t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{E}_0}{c} \sin(kz - \omega_k t)$$

- Densité d'énergie électromagnétique

$$u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = u_e(\mathbf{r}, t) + u_m(\mathbf{r}, t) = 2u_e(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz - \omega_k t)$$

$$\langle u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(\mathbf{r}, t) dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (T = 2\pi/\omega_k)$$

- Vecteur de Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) c \mathbf{e}_z \Rightarrow I(\mathbf{r}) \equiv \langle S(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \quad (\text{intensité})$$

- Densité d'impulsion

$$\mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) = \frac{u_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t)}{c} \mathbf{e}_z \Rightarrow \langle \mathbf{p}_{\text{ém}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \mathbf{e}_z$$

Ces résultats peuvent s'interpréter en termes de photons (particules de masse nulle se déplaçant à la vitesse de la lumière) d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $(\hbar\omega/c) \mathbf{e}_z$.

Solutions générales des équations de Maxwell

Les champs électrique et magnétique qui sont solutions des équations de Maxwell pour des sources arbitraires $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ se déduisent des potentiels retardés par les relations $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t) - \partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, soit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', t_r) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t)$$

où les contributions transverses \mathbf{E}_\perp et \mathbf{B}_\perp contiennent les éventuels champs radiatifs (champs transverses qui se comportent en $1/r$ à grande distance des sources),

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\partial_t \rho(\mathbf{r}', t_r)}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV'$$

$$\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{c} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV'$$

Champs radiatifs et rayonnement

Les champs radiatifs sont ces champs qui sont capables de transporter de l'énergie sur des distances arbitraires. La signature d'un rayonnement d'énergie est un flux irréversible d'énergie émanant d'une source. Considérons une source localisée près de l'origine de notre système de coordonnées. Imaginons une sphère de rayon r , beaucoup plus grande que les dimensions de la source. La puissance totale (énergie totale par unité temps) passant au travers de la surface \mathcal{S}_r de la sphère est donnée par l'intégrale du vecteur de Poynting, soit

$$P(r, t) = \int_{\mathcal{S}_r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{S}_r} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$$

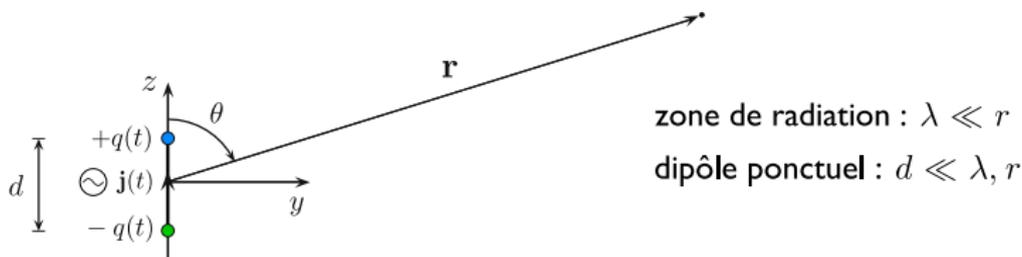
La puissance rayonnée est définie comme la limite de cette quantité lorsque le rayon r de la sphère tend vers l'infini,

$$P_{\text{rad}}(t) \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} P(r, t) \quad (\text{définition})$$

Elle représente l'énergie qui est transportée par les champs par unité de temps à l'infini, et qui ne revient donc jamais. Puisque la surface de la sphère vaut $4\pi r^2$, pour avoir un rayonnement ($P_{\text{rad}} \neq 0$), il faut que le vecteur de Poynting se comporte à grande distance comme $1/r^2$. Les champs (électrique et magnétique) statiques se comportent au mieux comme $1/r^2$ et le vecteur de Poynting au mieux comme $1/r^4$. Les sources statiques ne rayonnent donc pas. En revanche, des champs variables dans le temps (provenant de sources variables dans le temps) possèdent des composantes qui se comportent comme $1/r$ à grande distance. Ce sont ces composantes qui donnent lieu à un rayonnement électromagnétique.

Dipôle électrique oscillant

On considère deux sphères conductrices de taille négligeable reliées entre elles par un fil conducteur parcouru par un courant oscillant. Ce courant est choisi de manière à ce que les sphères portent une charge $\pm q(t) = \pm q_0 \cos(\omega t)$.



Les densités de charge et de courant associées à cette distribution de charges non-stationnaire,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q_0 \cos(\omega t) [\delta(\mathbf{r} - d/2 \mathbf{e}_z) - \delta(\mathbf{r} + d/2 \mathbf{e}_z)]$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -q_0 \omega \sin(\omega t) \delta(x) \delta(y) \theta(d/2 - |z|) \mathbf{e}_z$$

donnent lieu à une charge nulle et un moment dipolaire électrique oscillant

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t), \quad \mathbf{p}_0 = q_0 d \mathbf{e}_z$$

Dipôle électrique oscillant

À la limite ponctuelle ($d \ll r$, $d \ll c/\omega = \lambda/2\pi$) et à grande distance de la source ($r \gg c/\omega$, zone dite de radiation), les potentiels électromagnétiques sont donnés (en ne retenant que les termes en $1/r$) par

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \simeq -\frac{p_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos\theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)] \sim \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \mathbf{e}_z \sim \frac{1}{r}$$

Ces potentiels électromagnétiques dépendent du temps retardé $t - r/c$ et donnent, pour cette raison, lieu à des champs radiatifs

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \mathbf{e}_\theta \sim \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)}{c} = -\frac{p_0\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \mathbf{e}_\varphi \sim \frac{1}{r}$$

Rayonnement dipolaire électrique : profil d'intensité

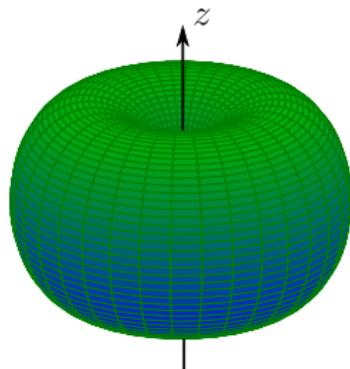
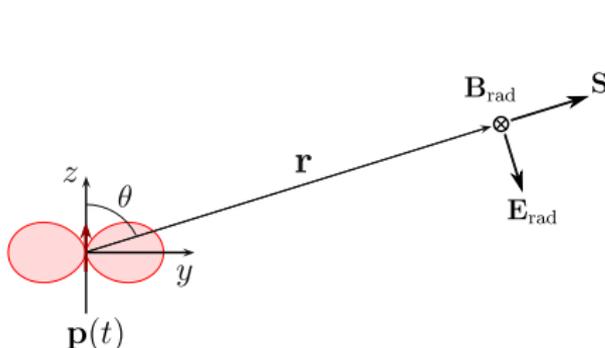
Les champs radiatifs représentent des ondes (sphériques) monochromatiques de pulsation ω se propageant dans la direction radiale à la vitesse de la lumière. $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ sont en phase, mutuellement perpendiculaires et transverses. Le rapport des amplitudes vaut $E_{\text{rad},0}/B_{\text{rad},0} = c$.

Vecteur de Poynting
(moyenné sur une période)

$$\langle \mathbf{S}_{\text{rad}} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Puissance rayonnée
(moyennée sur une période)

$$\langle P_{\text{rad}} \rangle = \int_{S_\infty} \langle \mathbf{S}_{\text{rad}} \rangle \cdot \mathbf{n} dS = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$



Rayonnement (dipolaire électrique) par une source arbitraire localisée

Pour une distribution localisée de charges et de courants arbitraires dépendant du temps, les résultats précédents restent valables pourvu que la dérivée seconde du moment dipolaire électrique de la distribution ne soit pas nulle à tout instant. Plus précisément, dans la zone de radiation (loin des sources), les champs radiatifs sont donnés par

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \ddot{\mathbf{p}}(t_r))] = \frac{\ddot{p}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)}{c} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} [\mathbf{e}_r \times \ddot{\mathbf{p}}(t_r)] = \frac{\ddot{p}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \mathbf{e}_\varphi$$

où $\mathbf{p}(t_r) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t_r) \mathbf{r} dV$ est le moment dipolaire électrique de la distribution de charges évalué au temps retardé $t_r = t - r/c$, et l'axe z est dans la direction de $\ddot{\mathbf{p}}(t_r)$, soit $\ddot{\mathbf{p}}(t_r) = \ddot{p}(t_r) \mathbf{e}_z$. Le vecteur de Poynting est donné par

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{[\ddot{p}(t_r)]^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \mathbf{e}_r$$

et la puissance totale rayonnée vaut

$$P_{\text{rad}}(t) \simeq \frac{[\ddot{p}(t_r)]^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

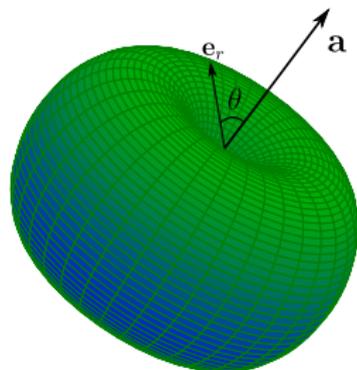
Formule de Larmor (non relativiste)

Toute charge accélérée génère un champ de radiation. Le champ émis étant proportionnel à l'accélération, la puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'accélération

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

Cependant, si les charges subissent juste une translation uniforme, le champ \mathbf{E}_{rad} s'annule et il n'y a aucun rayonnement émis. Ceci peut être vu comme une conséquence du principe de relativité restreinte qui stipule que les lois de la physique sont invariantes (ont la même forme) dans tous les référentiels d'inertie (référentiels en MRU les uns par rapport aux autres). Puisque la particule chargée ne rayonne pas dans le référentiel où elle est au repos, elle ne rayonnera pas non plus dans tout autre référentiel inertiel où elle est en MRU.



Champs créés par une charge ponctuelle en MRU

Les champs électrique et magnétique créés par une charge ponctuelle q se déplaçant le long d'une trajectoire rectiligne $\mathbf{R}(t) = (vt, 0, 0)$ à vitesse constante sont donnés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)|^2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c}$$

où $\beta = v/c$ et θ' est l'angle entre $\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)}$ et \mathbf{e}_x (direction de propagation).

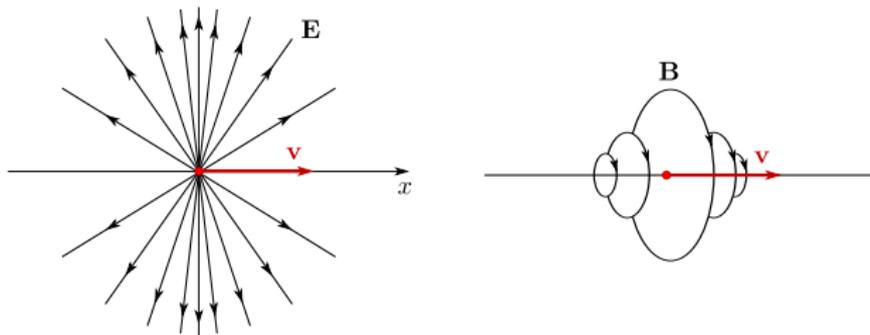
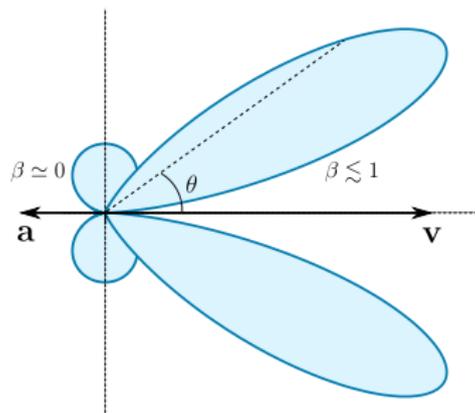


Fig. Lignes de champs électrique et magnétique créés par une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme (MRU).

Rayonnements de freinage et synchrotron

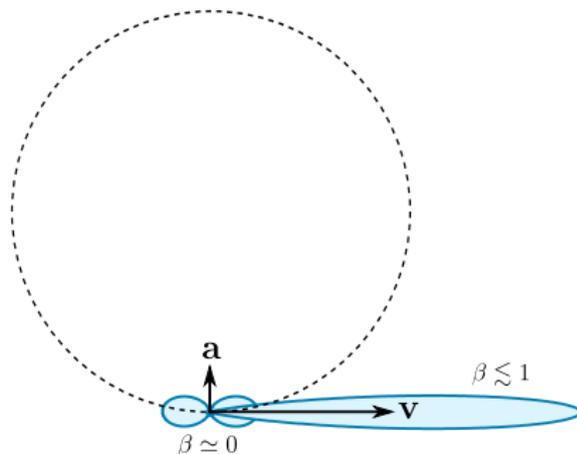
Rayonnement de freinage
Bremsstrahlung
a et **v** colinéaires

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$



Rayonnement synchrotron
a et **v** perpendiculaires

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$



$\beta = v/c$ et θ est l'angle entre **v** et **r**

$\beta \approx 0$: régime non relativiste, $\beta \lesssim 1$: régime relativiste

L'aimant et le conducteur

"It is known that Maxwell's electrodynamics - as usually understood at the present time - when applied to moving bodies, leads to asymmetries which do not appear to be inherent in the phenomena. Take, for example, the reciprocal electrodynamic action of a magnet and a conductor. The observable phenomenon here depends only on the relative motion of the conductor and the magnet, whereas the customary view draws a sharp distinction between the two cases in which either the one or the other of these bodies is in motion. For if the magnet is in motion and the conductor at rest, there arises in the neighbourhood of the magnet an electric field with a certain definite energy, producing a current at the places where parts of the conductor are situated. But if the magnet is stationary and the conductor in motion, no electric field arises in the neighbourhood of the magnet. In the conductor, however, we find an electromotive force, to which in itself there is no corresponding energy, but which gives rise - assuming equality of relative motion in the two cases discussed - to electric currents of the same path and intensity as those produced by the electric forces in the former case."

Sur l'électrodynamique des corps en mouvement (1905)
A. Einstein

Les principes de relativité

Principe de relativité classique

Toutes les lois de la mécanique ont la même forme dans tous les référentiels inertiels → transformations de Galilée (espace relatif, temps absolu)

Principe de relativité restreinte

Toutes les lois de la physique (mécanique, électromagnétisme, ...) ont la même forme dans tous les référentiels inertiels → transformations de Lorentz (espace et temps relatifs)

Principe de relativité générale

Toutes les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels → espace-temps = variété pseudo-riemannienne lorentzienne à quatre dimensions

Remarque : Des lois qui gardent la même forme dans différents référentiels sont dites covariantes

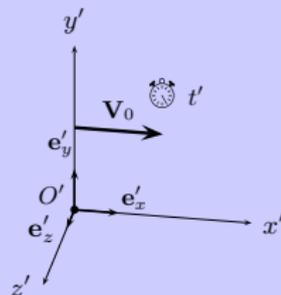
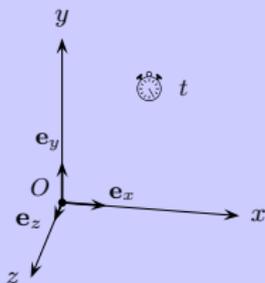
Principe de relativité classique

La loi fondamentale de la dynamique est invariante en forme sous transformations de Galilée.

Transformation de Galilée spéciale

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - V_0 t \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{p}' = m \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$$



Invariance des équations de Maxwell

Constat : L'expérience de Michelson et Morley a mis en évidence que la lumière se propage à la même vitesse c dans différents référentiels inertiels, en contradiction avec la loi d'addition des vitesses provenant de la transformation de Galilée.

Selon le principe de relativité restreinte, les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels inertiels. En jauge de Lorenz, leur formulation en termes de potentiels prend la forme d'équations d'onde (voir page 139) :

$$\square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

On en déduit que les équations de Maxwell sont invariantes sous l'action de toute transformation (prise linéaire et invertible sur \mathbb{R}^4) qui laisse invariante l'opérateur des ondes (où c est considérée comme une constante universelle)

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Parmi ces transformations, celles qui laissent l'origine de \mathbb{R}^4 fixe laissent aussi invariante la forme quadratique minkowskienne $s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ et forment un groupe : le groupe de Lorentz homogène.

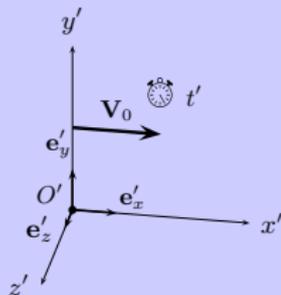
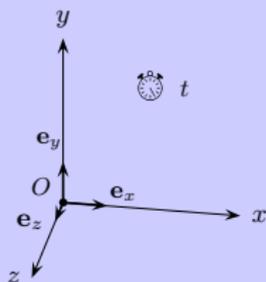
Principe de relativité restreinte

La loi fondamentale de la dynamique (sa généralisation relativiste) et les équations de Maxwell sont invariantes en forme sous transformations de Lorentz.

Transformation de Lorentz spéciale (boost selon x)

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \square A^\mu = -\mu_0 j^\mu, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t - V_0 x/c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \\ \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \square' A'^\mu = -\mu_0 j'^\mu, \quad \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'), \quad \mathbf{p}' = \frac{m_0 \mathbf{v}'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$$



Conséquences physiques d'un changement de référentiel inertiel

- La lumière se propage à la même vitesse c dans tout les référentiels inertiels.
- Deux évènements qui sont simultanés dans un référentiel inertiel ne le sont plus nécessairement dans un autre ($t_1 = t_2 \not\Rightarrow t'_1 = t'_2$).
- Des horloges en mouvement égrènent le temps plus lentement. C'est le phénomène de dilatation du temps : la durée relative est plus grande que la durée propre. Plus précisément, les intervalles de temps entre deux évènements mesurés par deux observateurs inertiels sont reliés par

$$\Delta t' = \sqrt{1 - V_0^2/c^2} \Delta t$$

- Des objets en mouvement sont raccourcis dans la direction de leur vitesse. C'est le phénomène de contraction des longueurs : la longueur relative est plus petite que la longueur propre. Plus précisément, les longueurs d'un même objet mesurées par deux observateurs inertiels sont reliées par

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \Delta x$$

Transformation de Lorentz et quadrivecteurs

La loi de transformation des coordonnées spatio-temporelles d'un évènement peut s'écrire, dans le cas d'un boost selon x , sous la forme

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec $\beta = V_0/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \geq 1$, ou encore

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

où on a introduit le quadrivecteur position

$$x^{\nu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (ct, x, y, z)^T$$

et la matrice réelle 4×4 de transformation de Lorentz Λ , de composantes

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \nu = 0 & \nu = 1 & \nu = 2 & \nu = 3 \\ \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mu = 0 \\ \mu = 1 \\ \mu = 2 \\ \mu = 3 \end{matrix}$$

Formulation relativiste des équations de Maxwell

Par extension, on définit les quadrivecteurs potentiels et sources

$$A^\mu = \begin{pmatrix} V/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

et on postule qu'ils obéissent aux mêmes lois de transformation (d'un référentiel inertiel à un autre) que le quadrivecteur position, soit

$$A'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \quad j'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu$$

Cela revient par exemple à réaliser que les densités de charge et de courant sont simplement deux aspects différents du même objet physique, le quadri-courant, dont la loi de transformation peut être déduite de l'invariance de la charge électrique et de la transformation de Lorentz pour les coordonnées spatio-temporelles.

Les équations de Maxwell admettent alors la même forme dans tout référentiel inertiel en termes de quadrivecteurs (forme covariante),

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

(en jauge de Lorenz)

Tenseur de Faraday et loi de transformation des champs

La loi de transformation du quadripotential permet de déterminer la loi de transformation des champs électrique et magnétique, puisque ceux-ci dérivent des potentiels. Le champ électromagnétique peut alors être décrit par un tenseur antisymétrique d'ordre 2, dit de Faraday, de composantes

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x/c & +E_y/c & +E_z/c \\ -E_x/c & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z/c & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Faraday})$$

Si, lors d'un changement de référentiel inertiel, le quadripotential se transforme selon $A'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$, alors le tenseur de Faraday se transforme selon

$$F'^{\mu\nu} = \sum_{\xi=0}^3 \sum_{\tau=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\xi} \Lambda^{\nu}_{\tau} F^{\xi\tau}$$

Dans le cas d'un boost selon x , cela mène à la loi de transformation des champs

$$\begin{cases} E'_x & = & E_x \\ E'_y & = & \gamma(E_y - V_0 B_z) \\ E'_z & = & \gamma(E_z + V_0 B_y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B'_x & = & B_x \\ B'_y & = & \gamma(B_y + V_0 E_z/c^2) \\ B'_z & = & \gamma(B_z - V_0 E_y/c^2) \end{cases}$$

Tenseur métrique, composantes contravariantes et covariantes

Le tenseur métrique η permet de calculer des distances spatio-temporelles entre évènements, $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$, égales pour tout observateur inertiel (i.e. Lorentz invariantes). Il est donné par

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Le tenseur métrique sert aussi à passer des composantes contravariantes (indices supérieurs) au composantes covariantes (indices inférieurs) selon

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \sum_{\xi=0}^3 \sum_{\tau=0}^3 \eta_{\mu\xi} \eta_{\nu\tau} F^{\xi\tau}$$

Ainsi, nous avons en termes de composantes covariantes,

$$x_\mu = \begin{pmatrix} -ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A_\mu = \begin{pmatrix} -V/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ +E_x/c & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y/c & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z/c & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

On notera que le tenseur de Faraday admet l'écriture $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, et que les équations de Maxwell admettent l'écriture covariante ($\mu, \nu, \xi = 0, 1, 2, 3$)

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0 j^\nu, \quad \frac{\partial F^{\nu\xi}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F^{\xi\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\xi} = 0$$

Stabilité de la matière

"... there would be a very real difficulty in supposing that the law $1/r^2$ held down to zero values of r . For the force between two charges at zero distance would be infinite ; we should have charges of opposite sign continually rushing together and, when once together, no force would be adequate to separate them... Thus the matter in the universe would tend to shrink into nothing or to diminish indefinitely in size... We should however probably be wrong in regarding a molecule as a cluster of electrons and positive charges. A more likely suggestion, put forward by Larmor and others is that the molecule may consist, in part at least, of rings of electrons in rapid orbital motion."

Jeans, 1915

"We take a piece of metal. Or a stone. When we think about it, we are astonished that this quantity of matter should occupy so large a volume. Admittedly, the molecules are packed tightly together, and likewise the atoms within each molecule. But why are the atoms themselves so big ? ... Answer : only the Pauli principle, 'No two electrons in the same state.' That is why atoms are so unnecessarily big, and why the metal and stone are so bulky."

Ehrenfest

Stabilité de la matière

La stabilité de la matière est d'origine quantique.

- Les atomes sont stables à cause d'un "principe d'incertitude" (une inégalité du même type que l'inégalité d'Heisenberg pour la position et l'impulsion d'une particule).
- La matière est stable à cause d'un "principe d'incertitude" plus fort, valable uniquement pour les fermions et lié au principe d'exclusion de Pauli.

Compléments

Ensemble de charges ponctuelles en mouvement

À un ensemble de N particules ponctuelles chargées en mouvement [charges q_i , vitesses \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, \dots, N$] correspondent les sources

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

Une telle distribution de charges en mouvement est caractérisée par une charge (électrique) totale $Q = \sum_i q_i$, et les moments dipolaires électrique et magnétique

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i(t)$$

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{v}_i(t)$$

Jauge de Coulomb (I)

Il est toujours possible d'effectuer une transformation de jauge de manière à satisfaire à la condition de jauge de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\mathbf{A} \text{ transverse})$$

En jauge de Coulomb, les potentiels obéissent aux équations

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Celles-ci admettent pour solutions

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_\perp \left(\mathbf{r}', t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

où \mathbf{j}_\perp est la densité de courant transverse ($\mathbf{j} = \mathbf{j}_\parallel + \mathbf{j}_\perp$ avec $\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = 0$)

$$\mathbf{j}_\perp(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Jauge de Coulomb (II)

Dans la jauge de Coulomb et en l'absence de sources ($\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$), les potentiels satisfont

$$V(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

Les champs électrique et magnétique (radiatifs) dérivent alors uniquement du potentiel vecteur par le biais des relations

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Équations de Helmholtz

Partons des équations de Maxwell pour les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ en l'absence de sources et cherchons des solutions (complexes) monochromatiques de pulsation ω ,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -i\mu_0\epsilon_0 \omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right.$$

Ceci nous mène directement aux équations d'Helmholtz (dans le vide)

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

qui ne possèdent en général de solutions que pour certaines valeurs de $\omega = kc$, appelées fréquences propres. Ces fréquences propres et les modes propres associés (les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$) dépendent des conditions aux limites imposées aux champs par la géométrie du système et par les propriétés électrique et magnétique de ses frontières (ex : une cavité métallique de forme rectangulaire).

Modes d'une cavité rectangulaire

Dans un conducteur parfait (mouvement libre et instantané des charges sans dissipation), les champs électrique et magnétique sont nuls¹. Seul le champ électrique $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r})$ normal à la surface du conducteur et le champ magnétique $\mathbf{B}_\parallel(\mathbf{r})$ parallèle à la surface peuvent être non nuls (de même que les densités surfaciques de charge $\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r})$ et de courant $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{n} \times \mathbf{B}_\parallel(\mathbf{r})$).

Dans une cavité métallique rectangulaire de cotés L_x, L_y, L_z , nous avons les modes propres

$$E_x(\mathbf{r}) = \sqrt{8/V} \epsilon_x \cos(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \sin(k_{n_z} z)$$

$$E_y(\mathbf{r}) = \sqrt{8/V} \epsilon_y \sin(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \sin(k_{n_z} z)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = \sqrt{8/V} \epsilon_z \sin(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \cos(k_{n_z} z)$$

de polarisation $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$, de vecteur d'onde et de pulsation

$$k_i = n_i \pi / L_i \quad (i = x, y, z, n_i \in \mathbb{N})$$

$$\omega_{n_x, n_y, n_z} = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

1. Plus précisément, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans le matériau conducteur et la troisième équation de Maxwell ($\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$) montre que \mathbf{B} est stationnaire dans le matériau. Si initialement le champ magnétique était nul, il le reste constamment.

Modes TE et TM

La loi de Faraday $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$ permet d'obtenir le champ magnétique associé

$$B_x(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_x \sin(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \cos(k_{n_z} z)$$

$$B_y(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_y \cos(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \cos(k_{n_z} z)$$

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_z \cos(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \sin(k_{n_z} z)$$

Les modes TE (transverse électrique) correspondent à un champ électrique dont la composante E_z est nulle ($\epsilon_z = 0$).

Les modes TM (transverse magnétique) correspondent à un champ magnétique dont la composante B_z est nulle ($(\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{k})_z = 0$).

Dipôle électrique ponctuel oscillant

À la limite ponctuelle ($d \ll r$, $d \ll c/\omega = \lambda/2\pi$), les champs émis par un dipôle oscillant de moment $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t) = \Re[\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}]$ sont donnés par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \left(k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{p}(t) - \left(k^2 + \frac{3ik}{r} - \frac{3}{r^2} \right) (\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r \right\} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(k^2 + \frac{ik}{r} \right) \mathbf{e}_r \times \mathbf{p}(t) \right]$$

A courte distance ($r \ll \lambda$, $kr \ll 1$), nous retrouvons le champ électrostatique créé par une dipôle ponctuel et la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique créé par un courant de densité $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(t)\delta(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{p}}(t)\delta(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}(t)}{r^3} \right)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{j}}(t) \times \mathbf{r}}{r^3}$$

tandis qu'à grande distance ($r \gg \lambda$, $kr \gg 1$), nous retrouvons les champs radiatifs (voir page 148).

Théorème de Wing (I)

Dans une région dépourvue de charges et de courants, l'intensité d'un champ statique, électrique ou magnétique, peut présenter des minima locaux mais pas de maxima locaux

Maxima :

En effet, supposons qu'un maximum de $|\mathbf{C}|$ existe ($\mathbf{C} = \mathbf{E}$ ou \mathbf{B}). Dans un système de coordonnées où le maximum est à l'origine, nous pouvons écrire

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(0) + \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad C^2(\mathbf{r}) = C^2(0) + \delta C^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{C}(0) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r}$$

avec $\delta\mathbf{C}(0) = 0$. Les deux premiers termes de C^2 sont positifs. Pour que $C^2(0)$ soit un maximum, nous devons avoir $\mathbf{C}(0) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) < 0 \quad \forall \mathbf{r}$ aux alentours de $\mathbf{r} = 0$. En prenant l'axe z le long de $\mathbf{C}(0)$, nous obtenons $\mathbf{C}(0) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) = C_z(0)\delta C_z(\mathbf{r})$ avec $C_z(0) > 0$ et la condition précédente devient $\delta C_z(\mathbf{r}) < 0 \quad \forall \mathbf{r}$ aux alentours de $\mathbf{r} = 0$. Par ailleurs, en régime statique, nous avons

$$0 = \nabla \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{C})}_{=0} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{C})}_{=0} - \Delta \mathbf{C} = -\Delta \mathbf{C} = -(\Delta \delta C_x, \Delta \delta C_y, \Delta \delta C_z)$$

Mais si δC_z vérifie l'équation de Laplace, sa valeur à l'origine (0) doit être égale à sa valeur moyenne sur une sphère centrée sur l'origine. Dès lors, la condition $\delta C_z(\mathbf{r}) < 0 \quad \forall \mathbf{r}$ aux alentours de $\mathbf{r} = 0$ ne peut être satisfaite et $|\mathbf{C}|$ ne peut avoir de maxima.

Théorème de Wing (II)

Minima :

Si un minimum de $|\mathbf{C}|$ existe à l'origine, alors, hormis le cas trivial $\mathbf{C} = \text{const}$, nous devons avoir

$$\delta C^2(\mathbf{r}) + 2 \mathbf{C}(0) \cdot \delta \mathbf{C}(\mathbf{r}) > 0 \quad \forall \mathbf{r} \text{ proche de } \mathbf{r} = 0$$

D'après la discussion sur les maxima, $\mathbf{C}(0) \cdot \delta \mathbf{C}(\mathbf{r})$, s'il est non-nul, ne peut garder le même signe en tout point proche de l'origine. Par conséquent, une manière de satisfaire la condition précédente est d'avoir $\mathbf{C}(0) \cdot \delta \mathbf{C}(\mathbf{r}) = 0$ (comme c'est le cas par exemple lorsque $\mathbf{C}(0) = 0$).

Exemple :

Le champ quadrupolaire $\mathbf{C} = c_x x \mathbf{e}_x + c_y y \mathbf{e}_y + c_z z \mathbf{e}_z$ avec $c_x + c_y + c_z = 0$ (afin de vérifier $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$) présente un minimum d'intensité à l'origine.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

La force que subit une particule (relativiste ou non) de charge q et de vitesse \mathbf{v} plongée dans un champ électromagnétique a pour expression

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{force de Lorentz})$$

Les équations du mouvement, qui déterminent l'évolution temporelle de la position de la particule $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, sont les équations de Newton. Dans le régime non-relativiste, celles-ci s'écrivent

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}_L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (2\text{e loi de Newton})$$

avec

$$\mathbf{p}(t) = m_0 \mathbf{v}(t) \quad (\text{quantité de mouvement})$$

où m_0 est la masse au repos de la particule, soit

$$\ddot{x}(t) = \frac{q}{m_0} [E_x(\mathbf{r}(t), t) + \dot{y}(t)B_z(\mathbf{r}(t), t) - \dot{z}(t)B_y(\mathbf{r}(t), t)]$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{q}{m_0} [E_y(\mathbf{r}(t), t) + \dot{z}(t)B_x(\mathbf{r}(t), t) - \dot{x}(t)B_z(\mathbf{r}(t), t)]$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{q}{m_0} [E_z(\mathbf{r}(t), t) + \dot{x}(t)B_y(\mathbf{r}(t), t) - \dot{y}(t)B_x(\mathbf{r}(t), t)]$$

Mouvement dans un champ magnétique homogène

En l'absence de champ électrique et en présence d'un champ magnétique homogène $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, la force de Lorentz est, à tout instant, orthogonale à \mathbf{e}_z et les équations du mouvement se réduisent à

$$\ddot{x}(t) = \frac{qB_0}{m_0} \dot{y}(t), \quad \ddot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m_0} \dot{x}(t), \quad \ddot{z}(t) = 0$$

Ces équations admettent comme solution générale

$$x(t) = x_0 + R \cos(\omega_c t + \varphi)$$

$$y(t) = y_0 + R \sin(\omega_c t + \varphi)$$

$$z(t) = z_0 + v_z t$$

avec $\omega_c = qB_0/m_0$. La quantité positive $|\omega_c| = \frac{|qB_0|}{m_0}$ est appelée pulsation cyclotron. Le mouvement global est la composition d'un MRU dans la direction du champ magnétique et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan orthogonal au champ magnétique. La trajectoire est une hélice de pas $h = v_z(2\pi/\omega_c)$. Comme le travail de la force magnétique est nul, l'énergie cinétique de la particule est conservée.

Formulation lagrangienne

Les équations du mouvement s'écrivent sous forme Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (q_i = x, y, z)$$

avec le Lagrangien (dans le régime non-relativiste)

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \underbrace{q [V(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}]}_{\text{potentiel généralisé}}$$

où $V(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sont les potentiels scalaire et vecteur dont dérive le champ électromagnétique.

Tout se passe comme si la particule chargée ressentait à chaque instant t le potentiel $q [V(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(t)]$. Bien que le lagrangien dépende explicitement des potentiels électromagnétiques, et donc du choix de la jauge, les équations du mouvement, elles, n'en dépendent pas. Un changement de jauge correspond à ajouter au Lagrangien la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction.

Formulation hamiltonienne

Les équations du mouvement s'écrivent sous forme Hamiltonienne

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

où p_i sont les impulsions canoniquement conjuguées aux coordonnées q_i (ou impulsions canoniques)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_0 v_i + q A_i \quad (q_i = x, y, z)$$

Celles-ci doivent être distinguées des composantes de la quantité de mouvement (ou impulsions mécaniques) $m_0 v_i = p_i - q A_i$. L'hamiltonien dans le régime non-relativiste a pour expression

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m_0} + qV(\mathbf{r}, t)$$

où le premier terme représente l'énergie cinétique $K = m_0 v^2/2$ de la particule chargée plongée dans le champ électromagnétique et le second terme son énergie potentielle (définie à une constante additive près).